



Méthode des éléments finis avec joints en recouvrement non-conforme de maillages : application au contrôle non destructif par courants de Foucault

Alexandra Christophe-Argenvillier

► To cite this version:

Alexandra Christophe-Argenvillier. Méthode des éléments finis avec joints en recouvrement non-conforme de maillages : application au contrôle non destructif par courants de Foucault. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112341 . tel-01127127

HAL Id: tel-01127127

<https://theses.hal.science/tel-01127127>

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologie de l'Information, des
Télécommunications et des Systèmes

Laboratoire de Génie Electrique de Paris

DISCIPLINE : Physique

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 24/11/2014

par

Alexandra CHRISTOPHE

MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS AVEC JOINTS EN RECOUVREMENT NON-CONFORME DE MAILLAGES : APPLICATION AU CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT

Directeur de thèse :	Yann LE BIHAN	Professeur (Université Paris-Sud)
Encadrants :	Edouard DEMALDENT	Ingénieur de Recherche (CEA)
	Guillaume KREBS	Maître de Conférences (Université Paris-Sud)
	Francesca RAPETTI	Maître de Conférences (Université de Nice Sophia-Antipolis)
Composition du jury :		
<i>Rapporteurs :</i>	Faker BEN BELGACEM	Professeur (Université de Compiègne)
	Francis PIRIOU	Professeur (Université de Lille 1)
<i>Président du Jury :</i>	Olivier GOUBET	Professeur (Université de Picardie Jules Verne)

*Il est vain de prétendre que les êtres humains doivent se satisfaire de la tranquillité ;
il leur faut du mouvement ; et s'ils n'en trouvent pas, ils en créeront.*

Jane Eyre, Charlotte Brontë

A mes parents

Remerciements

Voilà un exercice délicat que de formuler en quelques lignes la gratitude ainsi que la palette d'émotions qui sont miennes à l'heure de mettre un point final à ces 3 années de thèse. Au delà de l'aspect purement scientifique, l'aspect humain fait pleinement partie de la réussite d'un tel projet. Je vais donc, en quelques phrases, tenter d'exprimer ma reconnaissance à l'ensemble des personnes qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont aidée à mener à bien les travaux présentés dans ce manuscrit.

J'aimerais exprimer ma plus grande gratitude à Yann LE BIHAN qui a dirigé cette thèse durant 3 ans. Sa pleine maîtrise du contexte physique m'a permis de regarder au delà de mes propres connaissances. Il a souvent su m'apporter l'éclairage qui me manquait pour appréhender diverses difficultés. Je le remercie donc pour son implication, son attention et sa disponibilité durant la thèse et même après.

J'aimerais remercier vivement Messieurs Faker BEN BELGACEM et Francis PIRIOU pour avoir accepté de rapporter ce mémoire de thèse. Leurs témoignages m'ont permis de compléter mes travaux à la fois de manière scientifique mais également de manière pédagogique. De plus, à Monsieur Olivier GOUBET, j'adresse un grand merci pour avoir présidé le jury de cette soutenance de thèse.

Je tiens à remercier chaleureusement Francesca RAPETTI pour tous ses bons conseils ainsi que sa gentillesse. Sa contribution est, je le pense, inestimable à la qualité de ces travaux. Je la remercie donc pour m'avoir consacré énormément de temps, m'avoir beaucoup appris scientifiquement mais également humainement.

Ces travaux ont également été portés par les contributions de Messieurs Guillaume KREBS et Edouard DEMALDENT, à qui j'adresse ici un grand merci. Leurs contributions m'ont bien souvent permis d'aller au delà du sujet afin d'envisager ce dernier avec un regard neuf.

J'aimerais étendre mes remerciements à Monsieur Laurent SANTANDREA sans qui je ne pourrais pas, je le crois, présenter l'intégralité des résultats de ce mémoire. Au prix de nombreux échanges, il a investi de son temps professionnel mais également personnel sur les parties informatiques de ce travail, que je salue ici. Je le remercie également pour avoir partagé avec moi les aspects humains de la vie d'un établissement de recherche qui m'ont, pour sûr, rendue la vie plus belle au laboratoire.

Plus largement, je souhaiterais adresser mes sincères remerciements à l'ensemble du personnel du LGEP, son directeur Monsieur Frédéric BOUILLAUT et son personnel administratif, dont j'ai eu le plaisir de faire partie. Parmi eux, merci donc à Emmanuel BLANC, Alain BOSSAVIT, Demba DIALLO, Olivier HUBERT, Françoise JUBIN, Claude MARCHAND, Florence OSSART, Christine SAFAKHAH, Alexandra STABE et tout ceux que, malheureusement, j'aurais oublié.

Pour m'avoir fait participer aux différents événements du CEA-LIST, je tiens à remercier vivement Messieurs Pierre CALMON et Christophe REBOUD.

Ces 3 années de thèse ont été partagées avec nombre de doctorants, stagiaires, post-doctorants et généralement non-permanents qui ont su apporter diverses discussions plus ou moins scientifiques sur les temps libres. De grands moments de camaraderie, de rigolade et de joie de vivre qui ont fait passer ces 3 années à la vitesse de la lumière. Je remercie donc, entre autre, Abla, Antoine, Arnaud, Aymeric, Chao, Erwann, Greg, Houda, Kevin, Maya, Romain, Toufik, Xavier, ... , ainsi que tout ce que dont j'ai eu le plaisir de croiser le chemin. A tous, je leur souhaite bonne continuation.

Un merci particulier à des collègues devenus sans l'ombre d'un doute de très bons amis, Alexandre et Valentin. Les avoir à mes côtés a été d'un grand soutien. Ils font partis de ces belles rencontres de ces 3 années de thèse, je ne doute pas que nos liens traverseront les années.

Je tiens à remercier mes amis qui ont toujours été présents, m'ont toujours soutenue et m'ont accompagnée durant ces 3 années. Parmi eux, un grand merci à mes très chers Ambre, Barbara, Catherine, Céline, Christophe, Florian, Jennifer, Nicolas et Patrick, ..., j'en oublie, ils se reconnaîtront. Merci du fond du coeur d'avoir été et d'être toujours là pour moi.

Voici venir les derniers remerciements de ce mémoire et non pas des moindres, ils sont bien évidemment adresser à ma famille. Un grand merci à mon unique cousine, Letitia, qui m'a montré qu'au prix de nombreux efforts je pouvais atteindre mes objectifs. Enfin, je remercie mes parents Annick, Claudine, Jean-Pierre et Pascal, qui font preuve d'un soutien inconditionnel depuis toujours. Si je suis arrivée à effectuer de tels travaux et à devenir la personne que je suis aujourd'hui c'est grâce à eux, je leur dédie donc ce travail.

Morsang sur Orge, le 03/01/2015

Table des matières

Introduction	13
1 Méthode des éléments finis appliquée à l'électromagnétisme	17
1.1 Modélisation des phénomènes électromagnétiques	17
1.1.1 Equations de Maxwell	17
1.1.2 Lois de comportement	18
1.1.3 Conditions de transmission	19
1.1.4 Conditions aux limites	19
1.1.5 Formulations	19
1.1.6 Espaces fonctionnels et opérateurs différentiels	23
1.1.7 Complexes de Whitney	25
1.2 Approximation numérique en espace - méthode des éléments finis	29
1.2.1 Formulations	30
1.2.2 Mise en œuvre	31
1.2.3 Validations	32
1.3 Conclusion	37
2 Méthodes de décomposition de domaine	39
2.1 Overlapping	40
2.2 Interpolation	42
2.3 Multiplicateurs de Lagrange	43
2.4 Méthode des éléments finis avec joints	44
2.5 Arlequin	45
2.6 Schwarz	46
2.7 Comparaison des méthodes	47
2.8 Conclusion	49
3 Méthodes des éléments avec joints avec recouvrement	51
3.1 Avant propos	51
3.2 Cadre de l'étude	51
3.3 Décomposition de domaine	52
3.4 Décomposition de domaine - Formulations	52
3.4.1 Formulations fortes	53
3.4.2 Formulations variationnelles	54
3.4.3 Problèmes discrets	58

3.5	Décomposition de domaine - MEM	62
3.5.1	Projections L2	62
3.5.2	Estimation d'erreur	64
3.6	Conclusion	66
4	Mise en oeuvre et validations numériques	69
4.1	Construction des matrices de couplage	69
4.1.1	Cas scalaire	69
4.1.2	Cas vectoriel	72
4.2	Système matriciel global	74
4.3	Validations numériques	76
4.3.1	Cas scalaire	76
4.3.2	Cas vectoriel	77
4.4	Conclusion	79
5	Applications	81
5.1	Le CND par CF	81
5.1.1	Objectifs du CND	81
5.1.2	CND par CF	82
5.2	Modélisation du CND par CF	84
5.2.1	Intérêt de la modélisation	84
5.2.2	Cadre de la modélisation	84
5.2.3	Problématiques relatives à la modélisation	85
5.3	Application de la MEM avec recouvrement	86
5.4	Résultats	87
5.4.1	En absence de défaut	88
5.4.2	En présence de défaut	89
5.4.3	En présence d'une géométrie complexe	91
5.5	Conclusion	93
	Conclusions et perspectives	95
A	Cas électrostatique	97
A.1	Problème électrostatique	97
A.2	Résultats numériques	98
B	Condensation de Guyan - Performances comparées	101
B.1	Système matriciel final sans condensation de Guyan	101
B.2	Résultats numériques	102
C	Stratégie de recherche en maillage et gain en temps	105
C.1	Motivations	105
C.2	Stratégie optimale de recherche en maillage	105
C.3	Gain en temps	109

Table des figures

1.1	Diagramme de Tonti	25
1.2	Diagramme de Tonti pour la magnétodynamique	25
1.3	Maillage du cas test nodal	34
1.4	Représentation de la solution cas test nodal	34
1.5	Convergence de l'erreur en maillage scalaire	35
1.6	Maillage du cas test d'arête	36
1.7	Solution cas test d'arête	36
1.8	Convergence de l'erreur en maillage cas test d'arête	37
2.1	Décomposition de domaine	40
2.2	Méthode overlapping	41
2.3	Schéma de connexion par interpolation	42
3.1	Domaine global d'étude Ω	52
3.2	Décomposition de domaine	52
3.3	Recouvrement de maillages : en noir \mathcal{T}_H et en bleu \mathcal{T}_h	59
3.4	Interface d'échange γ de Ω_F vers Ω_M	60
3.5	Interface d'échange Γ de Ω_M vers Ω_F	60
4.1	Calcul matrice D : localisation des points de Gauss	71
4.2	Formes des matrices de couplage (cas scalaire)	72
4.3	Calcul des matrices D et H	74
4.4	Configuration géométrique (cas scalaire)	77
4.5	Distribution du champ magnétique (cas scalaire)	77
4.6	Courbes de convergence en maillage (cas scalaire)	78
4.7	Configuration géométrique (cas vectoriel)	79
4.8	Représentation de solution numérique (cas vectoriel)	79
4.9	Courbes de convergence en maillage (cas vectoriel)	80
5.1	CND par CF	82
5.2	Variation de l'amplitude des CF à l'intérieur d'un conducteur	83
5.3	Plan d'impédance normalisée	84
5.4	Problème CND par CF	85
5.5	Prises en compte du déplacement de la sonde	86
5.6	Décomposition de domaine	86
5.7	Stratégie de maillage	87
5.8	Ppotentiel vecteur magnétique	88

5.9	Représentation de Z_n dans le plan d'impédance normalisée	89
5.10	Déplacement de la sonde	90
5.11	Variation du flux magnétique	90
5.12	Dudgeonnage : configuration géométrique	91
5.13	Déplacement de la sonde	92
A.1	Domaine d'étude	98
A.2	Solution numérique	99
A.3	Courbes de convergence en maillage	100
B.1	Comparaison pour $H = 1/12$ et $h = 1/12$	102
B.2	Comparaison pour $H = 1/12$ et $h = 1/24$	102
B.3	Comparaison pour $H = 1/12$ et $h = 1/48$	103
B.4	Courbes de convergence en maillage	104
C.1	Orientation dans le sens anti-horaire pour l'élément $\{A, B, C\}$	106
C.2	Test d'appartenance d'un point à un élément	107
C.3	Méthode de recherche par bloc	107
C.4	Méthode du plus proche voisin	108
C.5	Performances comparées MEF - MEM avec recouvrement	110

Liste des tableaux

1.1	Erreurs et ordres de convergence associés pour un cas 2D nodal	35
1.2	Erreurs et ordres de convergence associés pour un cas 2D d'arête	36
2.1	Tableau comparatif des méthodes de décomposition de domaine	48
4.1	Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 cas test nodal	78
4.2	Erreurs et ordres en normes L^2 et $H(\mathbf{rot})$ cas test d'arête	80
5.1	Dimensions en millimètres	88
5.2	Valeurs des coefficients physiques	88
5.3	Dimensions du défaut en millimètres	89
5.4	Comparaison MEM avec recouvrement - PDE de Matlab	91
5.5	Caractéristiques géométriques du problème de dudgeonnage en millimètres	92
5.6	Paramètres physiques du problème de dudgeonnage	92
5.7	Comparaison MEM avec recouvrement - MEF	93
A.1	Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 cas test nodal statique	99
B.1	Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 sans condensation de Guyan	103
C.1	Performances comparées - Nombre de déplacement	109
C.2	Performances comparées - Nombre d'élément en maillage	109

Introduction

Contexte

Depuis plusieurs décennies, les industriels ont fait de la sécurité de leurs systèmes un axe de priorité majeur de recherche. Dans les secteurs du nucléaire et de l'aéronautique, par exemple, il est important de connaître l'état d'usure d'une pièce (tube de générateur de vapeur ou aile d'avion par exemple) sans l'endommager. C'est donc dans un contexte industriel exigeant quant aux normes de sécurité des systèmes de fonctionnement critique que le contrôle non destructif (CND) trouve son utilité. Le CND a pour objectif d'inspecter l'état d'une pièce (ou d'un matériau) sans porter atteinte à son intégrité. En vue de s'adapter au mieux à la variété de contrôle rencontré (géométrie, nature du matériau ...), diverses techniques ont été mises au point. Parmi elles, le CND par courants de Foucault (CF), pour l'inspection de pièces conductrices, présente une simplicité et un coût réduit de mise en œuvre. En effet, cette technique nécessite seulement l'utilisation d'une sonde (bobine), parcourue par un courant électrique alternatif, placée au voisinage de la pièce à inspecter. Le courant électrique génère un champ magnétique qui crée des courants électriques dans la pièce (appelés courants de Foucault). Ces courants développent, à leur tour, un champ magnétique qui modifie le champ magnétique total. Ce dernier est ainsi dépendant des caractéristiques de la pièce contrôlée. Pour contrôler de manière précise et efficace une pièce, la sonde doit être bien adaptée au problème considéré. C'est pourquoi, en CND par CF, la conception de sondes est un élément déterminant dans la mise en place d'une procédure de contrôle. Néanmoins, la réalisation pratique d'une sonde reste coûteuse. La simulation du CND par CF a pour objectif de réduire ces coûts en étudiant et prédisant les phénomènes électromagnétiques intervenant dans ce processus.

La modélisation du CND par CF a pour but d'étudier l'interaction sonde-pièce intervenant lors du contrôle. Il s'agit en particulier de savoir reproduire, avec précision, le comportement des phénomènes électromagnétiques présents lors du contrôle. Différentes familles de méthodes de résolution ont été étudiées et sont employées à l'heure actuelle en modélisation du CND par CF [44, 83, 74, 78, 101]. Basées sur des considérations théoriques de natures différentes, elles ont naturellement des avantages et des inconvénients qui leur sont propres [108]. Parmi elles, la méthode des éléments finis (MEF) est basée sur une formulation variationnelle du problème. Elle s'appuie sur des maillages non-structurés et est donc capable de s'adapter à des géométries complexes.

Le contrôle d'une pièce implique souvent de déplacer la sonde le long de celle-ci. Chaque position de la sonde dans le domaine implique une modification de la géométrie du problème examiné. Un remaillage du domaine global d'étude est, de ce fait, nécessaire. Il est,

donc, à considérer autant de remaillage que de positions de la sonde. A l'heure où l'accent est mis sur les performances machine, et notamment sur la rapidité des simulations, le remaillage systématique de l'ensemble d'un domaine d'étude apparaît comme très pénalisant.

Partant de ce constat, l'idée est née de décomposer le domaine d'étude en sous-domaines dans le but de rendre des groupes de géométrie indépendants entre eux lors de la résolution. Plus précisément, il s'agit de mettre en place une méthode de décomposition de domaine qui va effectuer un échange d'information réciproque, précis et stable entre les sous-domaines. Bien entendu, l'avantage d'une telle décomposition réside également en la possibilité d'adapter le pas de discrétisation local à chaque sous-domaine en fonction de la géométrie qu'il contient. La motivation essentielle de cette approche réside dans le gain en temps de calcul qui doit en découler pour atteindre une précision donnée sur un domaine donné.

La littérature recèle un certain nombre de travaux concernant l'étude et la mise en œuvre de techniques de décomposition de domaine en modélisation électromagnétique [5, 46, 94, 97, 104]. La méthode des éléments finis avec joints [16, 17] est une technique de décomposition de domaine non-conforme (i.e. dont les maillages des sous-domaines sont non-conformes entre eux), stable et optimale. Notamment, c'est une technique bien établie pour le recollement de maillages. Néanmoins, elle implique de réaliser les transferts d'information via une interface d'échange qui n'est pas modifiée avec le mouvement de tel ou tel domaine. La définition de cette interface n'étant pas toujours envisageable, l'idée d'une extension de cette méthode à des domaines avec recouvrement a, récemment, été introduite [53, 91]. Ces travaux présentent une technique de décomposition de domaine intéressante dans le sens où un sous-domaine peut se déplacer aléatoirement dans un domaine global et ce par le biais d'une interface qui reste inchangée. Cependant, elle ne considère pas d'échange réciproque d'information entre domaines. C'est précisément avec l'objectif de mettre en place un échange réciproque d'information entre domaines, où l'interface d'échange n'est pas systématiquement invariante, que les travaux de ce mémoire trouvent leur motivation.

Démarche

L'objet de cette thèse est, partant de [53, 91], de développer une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement réalisant des échanges réciproques d'information entre domaines. Ces travaux se placent dans le cadre d'une modélisation des équations de Maxwell en magnétodynamique pour laquelle les inconnues sont de nature scalaires ou vectorielles. En particulier, cela signifie que la méthode doit être développée pour les deux types d'inconnues envisagées. Ce mémoire se décompose en 5 parties dont le détail est donné par la suite.

La première partie présentera les phénomènes physiques associés à l'électromagnétisme. En particulier, les équations de Maxwell seront décrites et les principales formulations qui en découlent seront exprimées. Les outils mathématiques intervenant dans le cadre d'une simulation magnétodynamique seront rappelés. Enfin, une résolution par la MEF en espace et un schéma d'Euler implicite en temps sera détaillée, le système linéaire sera éga-

lement défini. Les performances de la simulation seront montrées sur des cas test simples. Dans la deuxième partie, une description et une comparaison des méthodes de décomposition de domaine couramment rencontrées dans le domaine de la simulation électromagnétique seront effectuées. Cette étude permettra de justifier les choix quant à une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement basée sur la méthode des éléments finis avec joints.

Dans une troisième partie, il s'agira de poser le cadre théorique de la méthode développée pour une formulation de notre problème que l'on aura défini. Pour ce faire, une décomposition de domaine sera appliquée au problème considéré. Les formulations forte et faible seront décrites et les opérateurs de couplage seront exprimés. Des estimations d'erreur seront également données.

La quatrième partie traitera de la mise en œuvre numérique, et notamment de la forme matricielle associée au problème étudié dans la partie précédente. La précision et l'ordre de convergence en maillage seront également évalués. Cet aspect du travail sera fondé sur une approche d'expérimentation numérique, dans le cadre de cas test simples bidimensionnels pour lesquels une solution analytique est connue.

Dans une dernière partie, la précision et la flexibilité de la méthode seront illustrées sur des cas de modélisation du CND par CF. En particulier, il s'agira de retrouver des comportements connus d'une sonde à CF. Enfin, les performances de la MEM avec recouvrement seront comparées aux performances d'une résolution par la MEF sans décomposition de domaine.

Chapitre 1

Méthode des éléments finis appliquée à l'électromagnétisme

Ce premier chapitre présente à la fois le modèle physique étudié mais aussi les différents outils topologiques et numériques intervenant dans le cadre de son étude. Dans un premier temps, les équations de Maxwell ainsi que les lois de comportements associées sont présentées. Par la suite, les espaces topologiques nécessaires à leur étude sont définis. Dans un dernier temps, la méthode des éléments finis est établie en terme d'approche théorique et numérique pour un cas d'équations généralistes et des résultats de précision en maillage sont présentés.

1.1 Modélisation des phénomènes électromagnétiques

1.1.1 Equations de Maxwell

Régime dynamique

La modélisation des phénomènes électromagnétiques, en milieux conducteurs ou non, est basée sur la résolution des équations de Maxwell. Ces dernières rendent, notamment, compte des liens entre phénomènes électriques et phénomènes magnétiques. L'expression de ces équations en domaine temporel s'écrit comme :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}, \quad (\text{théorème d'Ampère-Maxwell}) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (\text{loi de Faraday}) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{loi de conservation du flux magnétique}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (\text{théorème de Gauss}) \quad (1.4)$$

dans lesquelles \mathbf{H} représente le champ magnétique (A/m), \mathbf{E} le champ électrique (V/m), \mathbf{B} l'induction magnétique (T), \mathbf{D} l'induction électrique (C/m²), \mathbf{J} la densité de courant (A/m²) et enfin ρ la densité volumique de charges (C/m³).

Régime magnétodynamique

Pour des configurations où la taille du domaine géométrique est très petite devant la longueur d'onde du champ électrique et où les champs de déplacement sont négligés, l'équation (1.1) devient alors :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.5)$$

Cette nouvelle formulation du théorème d'Ampère-Maxwell admet une équation supplémentaire, relative à la conservation de densité de courant \mathbf{J} , exprimée par :

$$\mathbf{div} \mathbf{J} = 0 \quad (1.6)$$

Désormais l'ensemble des équations (1.2)-(1.3)-(1.5)-(1.6) régit un problème dit magnétodynamique des équations de Maxwell (appelé aussi problème quasi-statique).

Régime harmonique

Dans le cas de problèmes où le courant d'excitation est sinusoïdal de pulsation $\omega \neq 0$, la dérivée en temps est équivalente, dans le domaine complexe, au produit par $i\omega$ ce qui donne $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{E}(\mathbf{x})| \exp(i\omega t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{H}(\mathbf{x})| \exp(i\omega t)$. L'équation (1.2) devient alors dans le domaine complexe :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad (1.7)$$

De ce fait, l'ensemble des équations de Maxwell en régime harmonique est défini par les équations (1.3)-(1.5)-(1.6)-(1.7). Si $\omega = 0$, le problème global est ramené à un problème magnétostatique dépendant uniquement de (1.5) et (1.3).

1.1.2 Lois de comportement

Soit la décomposition du courant de conduction \mathbf{J} suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_i \quad (1.8)$$

avec \mathbf{J}_0 la densité de courant source dans un inducteur (une bobine par exemple) et \mathbf{J}_i la densité de courant induite dans le milieu conducteur.

Afin de tenir compte, des caractéristiques des matériaux rencontrés lors des modélisations magnétodynamiques. Il convient de définir des relations constitutives, dites lois de comportement définies, pour un matériau linéaire et isotrope, par :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{J}_i = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

où μ est la perméabilité magnétique (Hm^{-1}) et σ la conductivité électrique ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$). De manière plus précise on a :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

où μ_0 désigne la perméabilité du vide, alors que μ_r est la perméabilité relative du milieu considéré. Dans le cas d'un matériau isolant, on a $\sigma = 0$. La résolution d'un problème en régime quasi-statique fait uniquement appel aux relations (1.9) et (1.10).

1.1.3 Conditions de transmission

Soient deux milieux distincts $(\Omega_i)_{i=1,2}$ admettant deux systèmes propres d'équations de Maxwell régis par les champs $(\mathbf{H}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i)_{i=1,2}$. On note Γ la surface continue qui sépare ces deux milieux. Il y a donc nécessité de savoir comment réagissent les champs lors du passage d'un milieu à un autre.

Pour ce faire, les conditions de transmission des champs à l'interface Γ sont données par les équations suivantes :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

où \mathbf{J}_s est la densité surfacique de courant. Ces relations traduisent la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E} et normales de \mathbf{B} et \mathbf{J} à l'interface Γ . La composante tangentielle de \mathbf{H} n'est continue que si la surface de séparation ne possède pas de densité surfacique de courant.

1.1.4 Conditions aux limites

On se place dans le cadre d'une modélisation des équations de Maxwell avec un domaine d'étude Ω considéré borné. Afin d'avoir l'unicité de la solution, des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes peuvent être imposées sur les champs électrique et magnétique. Pour ce faire, la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est divisée en deux parties distinctes ($\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_H$ et $\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset$) : Γ_E où est imposée la condition sur le champ électrique et Γ_H où est imposée celle sur le champ magnétique. Le choix de ces deux frontières varient avec la configuration du problème. Elles s'expriment comme :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_E \quad (1.15)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_H \quad (1.16)$$

1.1.5 Formulations

Il est nécessaire de réécrire les équations de Maxwell afin de pouvoir appliquer une méthode de résolution. Dans le cadre de ces travaux, l'objectif est de se rapporter à des équations différentielles telles que des formulations faibles puissent en être déduites.

Parmi ces formulations, on en retient deux types : la première, qui est aussi la plus intuitive, tend à déterminer des formulations dites "en champ", la seconde, quant à elle, consiste en l'introduction d'outils mathématiques appelés potentiels.

Les formulations en champ se proposent d'exprimer les équations de Maxwell en fonction soit du champ magnétique \mathbf{H} soit du champ électrique \mathbf{E} . Ce choix de formulation peut, néanmoins, entraîner des difficultés lors de la prise en compte de discontinuités entre diverses régions. De plus, lors de la résolution numérique du problème en champs, la convergence peut s'avérer être délicate.

Les formulations en potentiels reposent sur l'introduction de potentiels scalaires et/ou vectoriels qui réduisent les problématiques à la fois d'ordre théorique et numérique. Cette section présente les formulations en champs et potentiels les plus couramment rencontrées dans le domaine de la modélisation électromagnétique et utilisées durant ce travail de thèse. Désormais, on se place sous l'hypothèse d'un régime quasi-statique.

Formulation en champ magnétique

Les équations de la magnétoynamique (1.2)-(1.6) peuvent s'écrire sous forme d'une formulation unique. Un choix possible est d'envisager le champ magnétique \mathbf{H} comme inconnue principale du problème.

A partir des lois de comportement (1.9) et (1.10) ainsi que de (1.2) on trouve l'équation :

$$\partial_t (\mu \mathbf{H}) + \mathbf{rot} (\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{H}) = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

Cette formulation accompagnée de conditions aux limites admet une unique solution.

Dans les milieux non conducteur ($\sigma = 0$), le problème peut se ramener à la résolution des équations (1.3) et (1.5).

Formulation en champ électrique

Une seconde formulation en champ envisageable est celle dépendant uniquement du champ électrique \mathbf{E} . Celle-ci est obtenue, dans un milieu conducteur, à partir des lois de comportement (1.9) et (1.10) ainsi que des équations (1.2)-(1.5), donnant :

$$\partial_t (\sigma \mathbf{E}) + \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

Cette formulation combinée à des conditions aux limites admet une unique solution.

Néanmoins dans le cas où $\sigma = 0$, l'équation ne détermine le champ électrique qu'à un gradient près ce qui n'assure pas l'unicité de la solution. Par conséquent, on a recours à l'utilisation d'une jauge assurant l'unicité de la solution.

Introduction des potentiels

Il existe des outils mathématiques appelés potentiels permettant de calculer les champs électromagnétiques mis en jeu [25, 23]. Ils ont pour objectif principal une meilleure prise en compte des discontinuités lors de la résolution numérique des équations. En effet, le problème est, de ce fait, réécrit avec des variables de continuité accrue dont sont dérivés les champs. L'introduction de potentiels scalaire et vectoriel repose sur le Lemme de Poincaré que l'on se propose de rappeler :

Lemme de Poincaré. *Soient les champs vecteurs réguliers \mathbf{E} et \mathbf{B} sur un domaine Ω contractile¹. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \mathbf{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.19)$$

1. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est dit contractile lorsque il est simplement connexe à frontière connexe. L'adjectif *connexe* signifie fait d'un seul morceau et *simplement connexe* que tout circuit est réductible à un point par déformation continue dans Ω [29].

alors un potentiel scalaire ϕ et un potentiel vecteur \mathbf{A} peuvent être introduits tels que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{grad} \phi \quad \mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (1.20)$$

Formulation en potentiels combinés $\mathbf{T} - \phi$

Par les équations (1.6) et (1.8) on introduit, dans le milieu conducteur, le potentiel vecteur électrique $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^3$ et dans l'inducteur $\mathbf{T}_0 \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{rot} \mathbf{T} \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_0 = \mathbf{rot} \mathbf{T}_0 \quad (1.21)$$

En introduisant ces expressions dans (1.5), on trouve que $\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{T} - \mathbf{T}_0) = \mathbf{0}$. Le potentiel scalaire magnétique $\phi \in \mathbb{R}$ est, alors, donné tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \mathbf{grad} \phi \quad (1.22)$$

On obtient le système d'équations en potentiels combinés $\mathbf{T} - \phi$ exprimé comme :

$$\mathbf{rot}(\sigma^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{T}) + \mu \partial_t (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \phi) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_C, \quad (1.23)$$

$$\text{div}(\mu (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \mathbf{grad} \phi)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.24)$$

où Ω désigne le domaine global d'étude et Ω_C le milieu conducteur. La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} est maintenue dans le cas où ϕ et la composante tangentielle de \mathbf{T} et \mathbf{T}_0 sont continus. Par ailleurs, la continuité de la composante normale de \mathbf{B} (1.12) est vérifiée par (1.24). De plus, (1.23) vérifie la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} .

Des conditions aux limites bien choisies ainsi qu'une condition de jauge sur \mathbf{T} permettent d'assurer l'unicité de la solution.

Formulation en potentiel scalaire magnétique ϕ

On se place désormais dans un domaine non conducteur (supposé libre de tout courant induit $\mathbf{J}_i = 0$). Une densité de courant source est néanmoins considérée telle que \mathbf{J} est réduit à \mathbf{J}_0 . De l'équation (1.6), un potentiel vecteur électrique $\mathbf{T}_0 \in \mathbb{R}^3$, propre à la source, est défini comme :

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{rot} \mathbf{T}_0 \quad (1.25)$$

En injectant (1.25) dans (1.5), on a la relation $\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{T}_0) = 0$ qui permet d'introduire le potentiel scalaire magnétique $\phi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \mathbf{grad} \phi \quad (1.26)$$

La formulation en potentiel scalaire magnétique est obtenue à partir de (1.3), (1.9) et (1.26) et s'exprime comme :

$$\text{div}(\mu \mathbf{grad} \phi) = \text{div}(\mu \mathbf{T}_0) \quad (1.27)$$

Notons que la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} est assurée sous la condition que le potentiel scalaire ϕ et la composante tangentielle de \mathbf{T}_0 soient continus. La condition de continuité de la composante normale de \mathbf{B} est vérifiée dans (1.27). En imposant les conditions aux bords relatives à la composante normale de \mathbf{B} , le problème ci-dessus admet une unique solution.

Formulation en potentiels combinés $\mathbf{A} - \psi$

En se plaçant dans un domaine contractile, une formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et potentiel scalaire électrique ψ est considérée ci-après. Par l'équation (1.3), on choisit d'introduire le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$ comme :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\partial_t (\mathbf{A} - \text{grad } \psi) \quad (1.28)$$

En remplaçant \mathbf{B} dans (1.2), on obtient $\text{rot} (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ et ainsi on en déduit, dans le milieu conducteur, une primitive $\psi \in \mathbb{R}$ du potentiel scalaire électrique telle que :

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \text{grad } \psi \quad (1.29)$$

Finalement, on obtient le système d'équations en formulation en potentiels combinés $\mathbf{A} - \psi$ qui s'écrit :

$$\text{rot} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}) - \sigma (\partial_t \mathbf{A} + \text{grad } \psi) = \mathbf{J}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.30)$$

$$\text{div} (\sigma (\partial_t \mathbf{A} + \text{grad } \psi)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_C. \quad (1.31)$$

La continuité associée à la normale du champ \mathbf{B} (1.12) est maintenue sous réserve que la composante tangentielle de \mathbf{A} soit continue. Par ailleurs, la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} et de la composante normale de \mathbf{J} sont vérifiées par (1.30) et (1.31).

Le potentiel vecteur \mathbf{A} est défini à un gradient près et ψ à une constante près par le Lemme de Poincaré. Des conditions aux limites bien choisies ne suffisent donc pas à assurer l'unicité de la solution. Dans ce cas, choix peut être fait d'imposer une condition de jauge sur \mathbf{A} [21, 82].

Formulation en potentiel vecteur magnétique modifié \mathbf{A}^*

Par la relation (1.3), on définit un potentiel vecteur magnétique dit modifié [81, 67], noté \mathbf{A}^* , qui donne :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}^* \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}^* \quad (1.32)$$

La loi de Faraday (1.2) est implicitement vérifiée dans cette relation. Le potentiel \mathbf{A}^* peut-être considéré comme une primitive temporelle du champ électrique \mathbf{E} . En portant les lois de comportement (1.9) et (1.10) et la relation (1.32) dans l'expression (1.5), on obtient la formulation \mathbf{A}^* qui s'écrit :

$$\partial_t (\sigma \mathbf{A}^*) + \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}^*) = \mathbf{J}_0 \quad (1.33)$$

Par ailleurs, en prenant la divergence de (1.33) il vient $\partial_t \text{div } \sigma \mathbf{A}^* = 0$, ce qui constitue une condition de jauge implicite pour la formulation considérée :

$$\text{div } \sigma \mathbf{A}^* = 0 \quad (1.34)$$

Néanmoins, cette condition de jauge est valable uniquement pour des régions conductrices sous la condition que $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$ en $t = 0$. Dans les régions isolantes, si une jauge est utilisée, elle doit être définie explicitement.

La condition (1.34) donne la continuité de $\sigma \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{n}$, ce qui entraîne que la composante normale de \mathbf{A}^* est discontinue à l'interface entre de deux matériaux de conductivités différentes. Enfin, la continuité de la composante normale de \mathbf{B} est vérifiée par (1.32).

1.1.6 Espaces fonctionnels et opérateurs différentiels

La théorie des équations de Maxwell est construite autour des espaces de Sobolev scalaires et vectoriels. Cette partie propose de rappeler les différents espaces mis en jeu ainsi que les opérateurs différentiels intervenant dans le cadre de notre étude. Des propriétés entre ces différents espaces seront également mises en évidence.

Espaces fonctionnels

Soient les fonctions $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ où Ω est un espace connexe à frontière connexe et régulière telle que $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et $p \in \{2, 3\}$. L'espace des fonctions de \mathbb{R} mesurables, de carré intégrable sur Ω , noté $L^2(\Omega)$, est défini par le produit scalaire :

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad u, v \in L^2(\Omega). \quad (1.35)$$

La norme de cet espace est définie comme $\|u\|_{0,\Omega} = (u, u)_{0,\Omega}^{1/2}$.

L'analogue à l'espace L^2 dans le cadre des fonctions vectorielles est noté $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et est déterminé par le produit scalaire suivant :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (1.36)$$

où la norme associée est $\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{0,\Omega}^{1/2}$.

Comme indiqué dans les relations (1.1)-(1.4), les opérateurs différentiels intervenant dans l'étude des équations de Maxwell sont le rotationnel, la divergence ainsi que l'opérateur gradient. Les espaces de définition qui décrivent ces opérateurs sont donnés par la suite :

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \quad (1.37)$$

définit par le produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{rot},\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathbf{rot} \, \mathbf{u}, \mathbf{rot} \, \mathbf{v})_{0,\Omega}$ et la norme associée $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{rot},\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{rot},\Omega}^{1/2}$

$$H(\mathbf{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{div} \, \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\} \quad (1.38)$$

avec le produit scalaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{div},\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathbf{div} \, \mathbf{u}, \mathbf{div} \, \mathbf{v})_{0,\Omega}$ et la norme $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{div},\Omega} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{div},\Omega}^{1/2}$.

$$H(\mathbf{grad}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \mathbf{grad} \, u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} = H^1(\Omega) \quad (1.39)$$

avec le produit scalaire $(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + (\mathbf{grad} \, u, \mathbf{grad} \, v)_{0,\Omega}$ et la norme $\|u\|_{1,\Omega} = (u, u)_{1,\Omega}^{1/2}$. On considère également l'espace $H^2(\Omega)$ tel que :

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), D^2 u \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \quad (1.40)$$

où D^2u est la dérivée spatiale d'ordre 2 de u . Cet espace est décrit par le produit scalaire $(u, v)_{2,\Omega} = (u, v)_{1,\Omega} + (D^2u, D^2v)_{0,\Omega}$ et la norme $\|u\|_{2,\Omega} = (u, u)_{2,\Omega}^{1/2}$.

Pour rappel, le théorème de Green usuellement rencontré est défini dans l'espace $H^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, v = - \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, u \cdot \mathbf{grad} \, v + \int_{\partial\Omega} \partial_n u \, v, \quad (1.41)$$

où $\partial_n u$ représente la dérivée normale de u . Il est généralisable aux espaces $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et $H(\mathbf{div}, \Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}, \quad (1.42)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \, v = - \int_{\Omega} \mathbf{div} \, \mathbf{u} \cdot v + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) v, \quad (1.43)$$

où $(\mathbf{u} \times \mathbf{n})$ et $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$ sont, respectivement, les composantes tangentielle et normale de \mathbf{u} sur $\partial\Omega$. Dans la théorie des formulations variationnelles, le théorème de Green est un outil couramment utilisé permettant de définir la formulation faible d'un problème.

Supposons que le domaine Ω soit contractile (supposé sans trous et sans boucle). Les espaces topologiques précédents définissent les égalités suivantes :

$$\text{Im}(\mathbf{grad}(H^1(\Omega))) = \text{Ker}(\mathbf{rot}(H(\mathbf{rot}, \Omega))), \quad (1.44)$$

$$\text{Im}(\mathbf{rot}(H(\mathbf{rot}, \Omega))) = \text{Ker}(\mathbf{div}(H(\mathbf{div}, \Omega))), \quad (1.45)$$

où $\text{Ker}(F(-))$ et $\text{Im}(F(-))$ désignent, respectivement, le noyau et l'image de l'opérateur F . Dans le cas où Ω n'est pas contractile, les égalités deviennent des inclusions :

$$\text{Im}(\mathbf{grad}(H^1(\Omega))) \subset \text{Ker}(\mathbf{rot}(H(\mathbf{rot}, \Omega))), \quad (1.46)$$

$$\text{Im}(\mathbf{rot}(H(\mathbf{rot}, \Omega))) \subset \text{Ker}(\mathbf{div}(H(\mathbf{div}, \Omega))). \quad (1.47)$$

Diagramme de Tonti

On pose les espaces suivants :

$$\begin{aligned} E_D^0(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ E_D^1(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega) : \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}, \\ E_D^2(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\mathbf{div}, \Omega) : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ E_D^3(\Omega) &= \mathbf{div} \, E_D^2, \end{aligned}$$

où $D \in \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$. La Figure 1.1 illustre un diagramme, appelé diagramme de Tonti [103], à quatre niveaux et deux colonnes représentatif de la structure mathématique formée par les espaces $E_D^0(\Omega)$, $E_D^1(\Omega)$, $E_D^2(\Omega)$ et $E_D^3(\Omega)$. A chaque niveau est associé un espace et à chacune des colonnes un système d'équations. Le passage d'un espace à un autre sur chaque colonne est réalisé via un opérateur différentiel spatial de premier ordre (gradient,

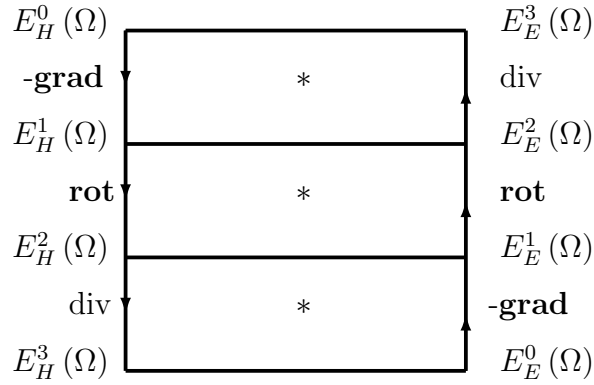


FIGURE 1.1 – Diagramme de Tonti

rotationnel ou divergence). Les espaces d'un même niveau sont, quant à eux, reliés par la transformation de Hodge (*).

Il est possible d'appliquer ce raisonnement pour une généralisation des problèmes de l'électromagnétisme et plus particulièrement des courants induits. Pour ce faire, la dérivation temporelle est désormais prise en compte ce qui fait apparaître une troisième dimension dans le diagramme, voir Figure 1.2.

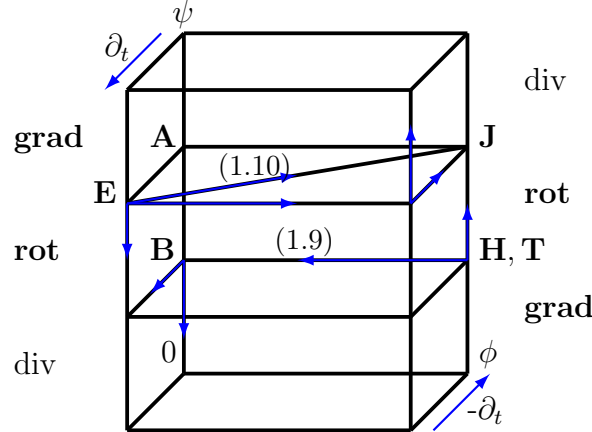


FIGURE 1.2 – Diagramme de Tonti pour la magnétodynamique

Ce dernier représente les liaisons reliant champs, espaces et lois de la modélisation de problèmes électromagnétiques. La partie gauche du diagramme correspond aux lois de Faraday et de conservation de flux. La partie de droite, duale de la partie gauche, correspond aux lois d'Ampère et de Gauss.

1.1.7 Complexes de Whitney

La modélisation des phénomènes électromagnétiques peut faire appel à des méthodes numériques qui nécessitent une discrétisation (appelée maillage) du domaine d'étude. La

découpe du domaine en un nombre d'éléments limités (tétraèdres, hexaèdres, triangles, ...) exige de faire appel à des fonctions, ou des champs de vecteurs, définis sur les entités du maillage (nœuds, arêtes, facettes ou encore volumes).

Les éléments de Whitney (où encore appelés première famille des éléments de Nédélec) apparaissent aux alentours de 1952 avec les contributions de Nédélec et Whitney [22, 66]. Ces derniers ont l'idée de définir des fonctions polynomiales du premier ordre sur les différentes entités du maillage. D'une part ces fonctions s'adaptent aux divers potentiels rencontrés, et d'autre part elles vérifient aisément les conditions de continuités mises en jeu.

La partie qui suit présente les complexes de Whitney les plus couramment rencontrés dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell.

On choisit de définir les ensembles d'entités du maillage : \mathcal{N} pour les nœuds, \mathcal{A} pour les arêtes, \mathcal{F} pour les facettes et enfin \mathcal{V} pour les volumes.

Eléments de Whitney d'ordre 0

Soit $\lambda_i(\mathbf{x})$ la fonction des coordonnées barycentriques du j -ème nœud \mathbf{x}_j relative au i -ème nœud de la discrétisation de Ω :

$$\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.48)$$

Cette fonction représente la fonction de base w_i associée au i -ème nœud de l'espace fonctionnel des éléments finis nodaux. L'ensemble des fonctions de cet espace définit les éléments de Whitney d'ordre 0, est noté W^0 , et possède la caractéristique d'être un sous-ensemble fini tel que :

$$W^0 \subset H^1(\Omega).$$

Il est alors possible d'approximer une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ sur la base de cet espace telle que son interpolation est donnée par l'expression suivante :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{N})} w_i(\mathbf{x}) u_i, \quad (1.49)$$

avec les u_i comme degrés de liberté de u aux nœuds du maillage.

Eléments de Whitney d'ordre 1

Soit l'arête $a = (i, j)$ orientée du nœud \mathbf{x}_i au nœud \mathbf{x}_j . La fonction de Whitney de l'arête a au point \mathbf{x} est un champ de vecteurs déterminé par une combinaison des fonctions de Whitney à l'ordre 0 ($\lambda_i(\mathbf{x})$ et $\lambda_j(\mathbf{x})$) des nœuds de a :

$$\mathbf{w}_a(\mathbf{x}) = \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}) - \lambda_j(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}). \quad (1.50)$$

L'ensemble formé par les éléments de Whitney d'ordre 1, est noté W^1 , et vérifie l'inclusion :

$$W^1 \subset H(\mathbf{rot}, \Omega).$$

La décomposition d'une fonction \mathbf{u} dans la base de W^1 est donnée par :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \mathbf{w}_a(\mathbf{x}) u_a, \quad (1.51)$$

où les degrés de liberté u_a sont les circulations de \mathbf{u} le long des arêtes telles que :

$$\int_{a'} \mathbf{w}_a da' = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq a' \\ 1 & \text{si } a = a' \end{cases} \quad (1.52)$$

Eléments de Whitney d'ordre 2

Considérons la facette orientée triangulaire $f = \{i, j, k\}$ à laquelle est associée le champ de vecteurs \mathbf{w}_f au point \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) = & 2(\lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_k(\mathbf{x}) \\ & + \lambda_j(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_k(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}) + \lambda_k(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (1.53)$$

L'espace de dimension fini engendré par les fonctions $(\mathbf{w}_f)_{f \in \mathcal{F}}$ forment l'ensemble des éléments de Whitney d'ordre 2, noté W^2 , et caractérisé par :

$$W^2 \subset H(\text{div}, \Omega).$$

L'approximation d'une fonction \mathbf{u} sur la base de W^2 s'écrit comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{f=1}^{\dim(\mathcal{F})} \mathbf{w}_f(\mathbf{x}) u_f, \quad (1.54)$$

où les coefficients (degrés de liberté) u_f sont les flux de \mathbf{u} à travers les facettes f .

Eléments de Whitney d'ordre 3

Soit le volume orienté $v = \{i, j, k, l\}$ de mesure $|v|$. En considérant à chaque nœud du volume l'élément de Whitney d'ordre 0 lui correspondant, on a la fonction associée au volume :

$$\begin{aligned} w_v(\mathbf{x}) = & 6(\lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_k(\mathbf{x}). \mathbf{grad} \lambda_l(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_j(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_k(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_l(\mathbf{x}). \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_k(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_l(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}). \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}) + \\ & \lambda_l(\mathbf{x}) \mathbf{grad} \lambda_i(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} \lambda_j(\mathbf{x}). \mathbf{grad} \lambda_k(\mathbf{x})) = |v|^{-1}, \end{aligned} \quad (1.55)$$

L'ensemble des fonctions définies sur les volumes forment l'espace des éléments de Whitney à l'ordre 3, noté W^3 , et possède la caractéristique :

$$W^3 \subset L^2(\Omega).$$

L'approximation de la fonction u dans l'espace des éléments de Whitney d'ordre 3 est donnée par l'expression suivante :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{v=1}^{\dim(\mathcal{V})} w_v(\mathbf{x}) u_v, \quad (1.56)$$

avec la charge contenue dans l'élément v notée $u_v = \int_v u \, dv$.

Propriétés des éléments de Whitney

Bossavit [24] a mis en évidence l'existence de propriétés remarquables entre les espaces de Whitney définis précédemment. Parmi celles-ci, une propriété liant les espaces entre eux par des inclusions est mise en avant :

$$\mathbf{grad}(W^0) \subset W^1, \quad \mathbf{rot}(W^1) \subset W^2, \quad \mathbf{div}(W^2) \subset W^3. \quad (1.57)$$

L'intérêt principal de cette propriété est d'introduire la notion d'incidence entre éléments d'espaces de Whitney différents et plus particulièrement de matrices d'incidence.

On appelle matrices d'incidence, les matrices qui permettent de calculer le gradient d'une fonction de W^0 , le rotationnel d'une fonction de W^1 ainsi que la divergence d'une fonction de W^2 . Ces dernières sont la conséquence directe des inclusions présentées précédemment (1.57) et s'écrivent :

$$\sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} i(n, a) \mathbf{w}_a = \mathbf{grad} \, w_n, \quad (1.58)$$

$$\sum_{f=1}^{\dim(\mathcal{F})} i(a, f) \mathbf{w}_f = \mathbf{rot} \, w_a, \quad (1.59)$$

$$\sum_{v=1}^{\dim(\mathcal{V})} i(f, v) w_v = \mathbf{div} \, w_f, \quad (1.60)$$

où n, m, k et l sont des nœuds qui définissent une arête a , une facette f et un volume v tels que :

$$i(n, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = \{m, n\} \\ -1 & \text{si } a = \{n, m\} \\ 0 & \text{si } n \notin a \end{cases}$$

$$i(a = \{m, n\}, f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f = \{m, n, k\} \text{ ou } f = \{k, m, n\} \text{ ou } f = \{n, k, m\} \\ -1 & \text{si } f = \{n, m, k\} \text{ ou } f = \{k, n, m\} \text{ ou } f = \{m, k, n\} \\ 0 & \text{si } a \notin f \end{cases}$$

$$i(f = \{m, n, k\}, v) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } f \in v, \text{ le signe dépend de l'orientation de } f \text{ dans } v \\ 0 & \text{si } f \notin v \end{cases}$$

En particulier, prenons l'exemple $\mathbf{H} = \mathbf{grad} \phi$ avec le potentiel scalaire $\phi \in W^0$ alors on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \mathbf{grad} \phi &\approx \sum_{n=1}^{\dim(\mathcal{N})} \phi_n \mathbf{grad} w_n(\mathbf{x}) \approx \sum_{n=1}^{\dim(\mathcal{N})} \phi_n \sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} i(n, a) \mathbf{w}_a \\ &\approx \sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \left(\sum_{n=1}^{\dim(\mathcal{N})} i(n, a) \phi_n \right) \mathbf{w}_a \end{aligned}$$

Dans ce cas, le champ \mathbf{H} est de la forme (1.51) avec les degrés de liberté aux arêtes :

$$u_a = \sum_{n=1}^{\dim(\mathcal{N})} i(n, a) \phi_n \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

Précisément, le degré de liberté associé à l'arête $a = \{n, m\}$ est évalué à partir de la différence des valeurs nodales correspondant à chacun des nœuds ($u_a = \phi_m - \phi_n$). Il en vient la relation matricielle reliant le vecteur des circulations relative aux arêtes \mathbf{h} , au vecteur des degrés de liberté nodaux Φ :

$$\mathbf{h} = G\Phi$$

La matrice G est alors considérée comme l'équivalent discret du gradient.

En suivant le même raisonnement, il est possible de déterminer les équivalents discrets R du rotationnel et D de la divergence [47] comme $\mathbf{j} = R\mathbf{h}$ et $\mathbf{q} = D\mathbf{j}$, où les vecteurs \mathbf{j} et \mathbf{q} représentent les vecteurs des degrés de liberté de \mathbf{J} sur les facettes et de \mathbf{Q} sur les volumes relativement aux formules :

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{rot} \mathbf{H} &\approx \sum_{f=1}^{\dim(\mathcal{F})} \left(\sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} i(a, f) u_a \right) \mathbf{w}_f \\ \mathbf{Q} = \mathbf{div} \mathbf{J} &\approx \sum_{v=1}^{\dim(\mathcal{V})} \left(\sum_{f=1}^{\dim(\mathcal{F})} i(f, v) b_f \right) w_v \end{aligned}$$

1.2 Approximation numérique en espace - méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode d'approximation basée sur une formulation variationnelle du problème considéré. La discrétisation du domaine d'étude en mailles tend à choisir un espace d'approximation comme étant un espace de fonctions polynomiales par morceaux. Cet espace est alors de dimension finie. La littérature, quant à l'étude théorique de la méthode des éléments finis, se trouve être très variée [6, 8, 34]. Dans celle-ci on peut citer les ouvrages de Dhatt et Touzot [43] ou encore de Brenner [28] traitant à la fois de la théorie et de la mise en œuvre de cette méthode.

Le concept de formulation variationnelle a été introduit par Courant [39]. Par la suite, la MEF a été développée théoriquement par de nombreux travaux, citons notamment ceux de Strang et Fixe [36, 100]. La notion même d'éléments finis apparaît en 1960 avec Clough [37]. Cette contribution pose les principaux jalons de la méthode numérique. C'est en mécanique des structures que l'on trouve les premières applications de la MEF [105]. La méthode a ensuite été largement diffusée dans la communauté industrielle grâce notamment à la contribution de Zienkiewicz [109]. Désormais, la méthode des éléments finis fait office de méthode numérique de référence tant dans le domaine théorique que dans le domaine industriel.

Les éléments finis sont également couramment utilisés pour la modélisation de phénomènes électromagnétiques [80, 98]

Dans le cas de modélisations en domaine temporel, la MEF peut être associée à des schémas en temps [60].

1.2.1 Formulations

Afin de présenter la méthode des éléments finis, un problème simple de diffusion dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^p avec $p \in \{2, 3\}$ est défini tel que :

$$\alpha \partial_t \mathbf{u} + \beta \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (1.61)$$

$$C.L. \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \quad (1.62)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.63)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ avec $p \in \{2, 3\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $C.L$ sont les conditions aux limites.

Il est à noter que ce problème est considéré générique dans le sens où \mathbf{u} n'est pas attribué comme un champ ou potentiel précisé.

La formulation de ce problème est donnée lorsqu'une fonction test $\mathbf{v} \in V$ est introduite dans (1.61) et en intégrant l'ensemble sur Ω tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \int_{\Omega} (\alpha \partial_t \mathbf{u} + \beta \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0 \quad (1.64)$$

et où V est un espace contenu dans $H(\mathbf{rot}, \Omega)$.

En appliquant la formule (1.42), on obtient la formulation variationnelle suivante : trouver $\mathbf{u} \in V$ tel que :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \alpha \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \beta \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\gamma = 0 \quad (1.65)$$

On considère une discrétisation \mathcal{T}_h du domaine d'étude Ω , en éléments triangulaires, où h décrit le pas de raffinement du maillage tel que :

$$h = \max_{T_k \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T_k) \quad (1.66)$$

avec T_k le k -ième élément du maillage et $\text{diam}(T_k)$ son diamètre Euclidien.

Le problème (1.65) peut, désormais, s'écrire de manière discrète telle que : trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$

tel que :

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad \alpha \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \beta \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{v}_h \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{rot} \, \mathbf{u}_h \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h \, d\gamma = 0 \quad (1.67)$$

où V_h est un sous-espace de dimension finie de V sur \mathcal{T}_h .

1.2.2 Mise en œuvre

Système matriciel

On choisit de présenter une résolution sur les arêtes² du maillage i.e que les inconnues du problème correspondent aux circulations le long des arêtes du maillage. Pour ce faire, les fonctions de forme sont définies par les éléments de Whitney d'ordre 1 présentés dans 1.1.7. La solution approchée \mathbf{u}_h s'exprime sous la forme d'une combinaison des éléments de base telle que :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \mathbf{w}_a(\mathbf{x}) u_a \quad (1.68)$$

où les degrés de liberté u_a sont les circulations de \mathbf{u}_h le long des arêtes de \mathcal{T}_h . En remplaçant \mathbf{u}_h par (1.68) dans (1.67) et en choisissant comme fonction test \mathbf{v}_h une fonction de base, on obtient l'expression :

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad \alpha \int_{\Omega} \partial_t \left(\sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \mathbf{w}_a(\mathbf{x}) u_a \right) \cdot \mathbf{w}_{a'} \, d\Omega + \quad (1.69)$$

$$\beta \int_{\Omega} \mathbf{rot} \left(\sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \mathbf{w}_a(\mathbf{x}) u_a \right) \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_{a'} \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{rot} \left(\sum_{a=1}^{\dim(\mathcal{A})} \mathbf{w}_a(\mathbf{x}) u_a \right) \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_{a'} \, d\gamma = 0 \quad (1.70)$$

On se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires, qui s'écrit vectoriellement sous la forme :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 \quad (1.71)$$

où \mathbf{U} est le vecteur des inconnues du problème. Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont carrées de dimensions $\dim(\mathcal{A}) \times \dim(\mathcal{A})$ et sont définies par :

$$\mathbf{M}(a, a') = \alpha \int_{\Omega} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{w}_{a'} \, d\Omega \quad (1.72)$$

$$\mathbf{K}(a, a') = \beta \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_{a'} \, d\Omega + \beta \int_{\Gamma} (\mathbf{rot} \, \mathbf{w}_a \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_{a'} \, d\gamma \quad (1.73)$$

Usuellement, la matrice \mathbf{M} est appelée matrice de masse et \mathbf{K} matrice de rigidité du système.

2. On se place dans le cas particulier d'une résolution sur les arêtes du maillage. Le principe de la résolution reste le même pour des inconnues nodales, de facettes ou de volumes

Approximation numérique en temps

Dans le but d'étudier des phénomènes électromagnétiques évoluant en temps (en dehors du régime harmonique), on formule une approximation de la solution dans le domaine temporel $[0, T]$ avec $T > 0$ le temps final. Par l'expression (1.71), on exprime la dérivée en temps de la solution \mathbf{U} comme une fonction linéaire de \mathbf{U} :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = L(\mathbf{U}) \quad (1.74)$$

avec $L(\mathbf{U}) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U}$.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et le pas de temps $\Delta t = T/N$ (où $0 \leq \Delta t \leq T$). La solution approchée au temps $t^n = n\Delta t$ où $n \in \{0, \dots, N\}$ est notée \mathbf{U}^n .

Dans le cadre de ces travaux, le schéma du premier ordre Euler implicite est choisit, ce qui signifie que la solution au temps t^{n+1} est obtenue à partir de la solution au temps t^n :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t L(\mathbf{U}^{n+1}) \quad (1.75)$$

L'utilisation d'une méthode implicite en temps présente l'avantage de ne pas imposer de condition restrictive quant aux choix des pas d'espace et de temps. En revanche, le coût relatif à l'inversion de la matrice peut s'avérer contraignant.

1.2.3 Validations

On souhaite désormais évaluer le comportement numérique de la MEF pour des cas test simples, faciles à implémenter et où une solution analytique est connue explicitement. L'intérêt, ici, est de regarder les erreurs commises sur différents pas de maillage ainsi que l'ordre de convergence de la méthode en fonction de ce même pas. La convergence en maillage permet, ainsi, de tester la précision des méthodes numériques en évaluant numériquement un ordre de précision.

La MEF est examinée pour des cas d'inconnues scalaires et vectorielles. L'erreur, entre solutions approchée \mathbf{U} et la projection de la solution analytique \mathbf{U}^{ana} sur l'espace de discrétisation, est déterminée en norme L^2 et semi-norme H^1 pour des inconnues scalaires et en norme L^2 et semi-norme $H(\mathbf{rot})$ pour des inconnues vectorielles. Leurs expressions sont rappelées par la suite :

Erreurs pour des degrés de liberté nodaux :

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}\|_{L^2}^2 = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}})^T \mathbf{M} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}) \quad (1.76)$$

$$|\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}|_{H^1}^2 = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}})^T \mathbf{R} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}) \quad (1.77)$$

avec \mathbf{U} et \mathbf{U}^{ana} les vecteurs des solutions numérique et exacte aux nœuds du maillage, et les matrices \mathbf{M} et \mathbf{R} :

$$\mathbf{M}(i, j) = \int_{\Omega} w_i w_j \, d\Omega, \quad \mathbf{R}(i, j) = \int_{\Omega} \mathbf{grad} \, w_i \cdot \mathbf{grad} \, w_j \, d\Omega$$

Erreurs pour des degrés de liberté d'arête :

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}\|_{L^2}^2 = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}})^T \mathbf{M} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}) \quad (1.78)$$

$$|\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}|_{H(\mathbf{rot})}^2 = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}})^T \mathbf{R} (\mathbf{U} - \mathbf{U}^{\text{ana}}) \quad (1.79)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{U}^{ana} sont les circulations des solutions numérique et exacte sur la base des éléments de Whitney correspondant. Les matrices \mathbf{M} et \mathbf{R} sont, quant à elles, calculées comme suit :

$$\mathbf{M}(i, j) = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \, d\Omega, \quad \mathbf{R}(i, j) = \int_{\Omega} \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{w}_j \, d\Omega$$

La norme L^2 donne une évaluation du comportement moyen de l'erreur et la norme H^1 , ou $H(\mathbf{rot})$, du comportement moyen du gradient de l'erreur (ou sur le rotationnel) commise par la solution approchée.

Afin d'évaluer la convergence en maillage de la méthode, on suppose deux maillages non structurés. Le premier est défini par le pas en espace h_1 et le second par h_2 sous la condition $h_1 \neq h_2$. Par la théorie de la MEF, il existe une approximation de l'erreur, en norme $X \in \{L^2, H^1\}$, sur chacun des maillages telle que :

$$\|u_{h_1} - u^{\text{ana}}\|_X = c h_1^k \quad \text{et} \quad \|u_{h_2} - u^{\text{ana}}\|_X = c h_2^k \quad (1.80)$$

où k est l'ordre supposé de la méthode et c une constante dépendant de la solution mais pas du pas d'espace. Il vient l'égalité suivante :

$$\frac{\|u_{h_1} - u^{\text{ana}}\|_X}{\|u_{h_2} - u^{\text{ana}}\|_X} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^k \quad (1.81)$$

Finalement, l'ordre de convergence entre deux maillages de raffinement différent est déterminé par la formule :

$$k = \frac{\ln \left(\frac{\|u_{h_1} - u^{\text{ana}}\|_X}{\|u_{h_2} - u^{\text{ana}}\|_X} \right)}{\ln \left(\frac{h_1}{h_2} \right)} \quad (1.82)$$

Cas test nodal

On choisit de résoudre le problème (1.61) en 2D (avec $\alpha = 1$ et $\beta = 0.75$) combiné aux éléments de Whitney d'ordre 0. La solution numérique est ainsi calculée aux nœuds du maillage et les inconnues sont scalaires. Le comportement numérique de la méthode est évalué sur un domaine (x, y) de dimension $[0, 1] \times [0, 1]$ en espace et $[0, T]$, où $T \geq 0$ est considéré comme le temps final (Fig. 1.3). Notamment, on choisit $T = 1s$ et une discrétisation de $M = 100$ pas en temps tel que $\Delta t = 10ms$. La condition initiale est prise comme $u(x, y, 0) = 0 \, \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Les conditions aux limites sont choisies comme conditions de Dirichlet et sont données par :

$$C.L \begin{cases} u(x, 0, t) = 0 & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \\ u(x, 1, t) = \sin(\pi x) & \forall (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \\ u(0, y, t) = 0 & \forall (y, t) \in [0, 1] \times [0, T] \\ u(1, y, t) = \sin(\pi y) & \forall (y, t) \in [0, 1] \times [0, T] \end{cases}$$

La solution numérique est obtenue à l'aide d'une inversion directe du système linéaire.

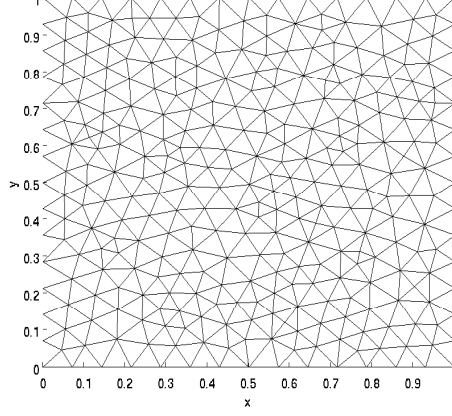


FIGURE 1.3 – Maillage du cas test nodal

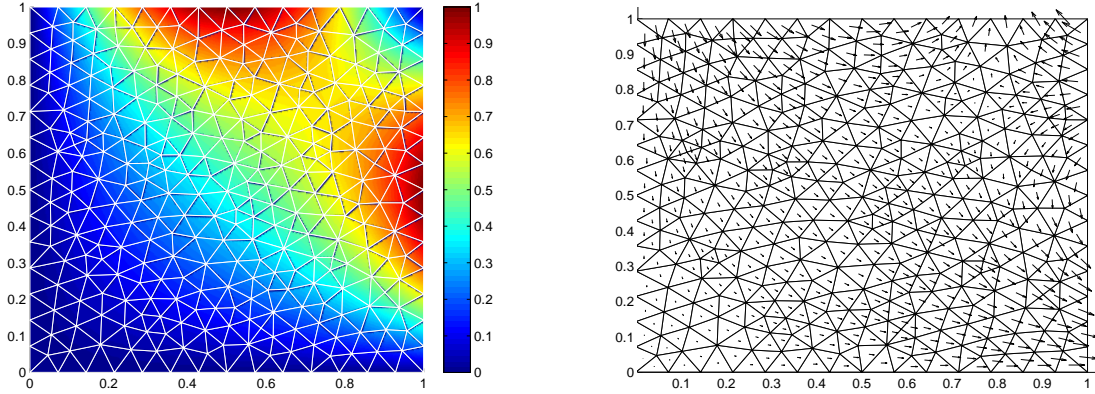


FIGURE 1.4 – Représentation de la solution stationnaire : module du champ magnétique (gauche), champ magnétique solution (droite)

La solution analytique de ce problème est connue [102] :

$$u^{\text{ana}}(x, y) = \frac{1}{\sinh(\pi)} \left(\sinh\left(\pi \frac{x}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right) + \sinh\left(\pi \frac{y}{L}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right) \quad (1.83)$$

Le tableau 1.1 contient les erreurs en norme ainsi que les ordres de convergence pour un raffinement de maillages h allant de $\frac{1}{6}m$ à $\frac{1}{96}m$. La Figure 1.5 montre l'évolution du logarithme de l'erreur en fonction du logarithme du diamètre moyen des éléments du maillage. Elle est linéaire et la pente correspond à l'ordre de précision de la méthode. Les résultats présentés démontrent une méthode d'ordre 2 en norme L^2 et d'ordre 1 en norme H^1 correspondant aux résultats prédis par la théorie de la MEF [80].

Δx_{EF}	EF \mathcal{P}^1 + Euler Implicite			
	erreur L^2		erreur H^1	
1/6	2,80E-03	-	2,84E-02	-
1/12	1,50E-03	1	1,82E-02	0.6
1/24	4,07E-04	1,9	1,37E-02	0,4
1/48	1,58E-04	1,4	6,90E-03	1
1/96	3,94E-05	2	3,50E-03	1

TABLE 1.1 – Erreurs et ordres de convergence associés pour un cas 2D nodal

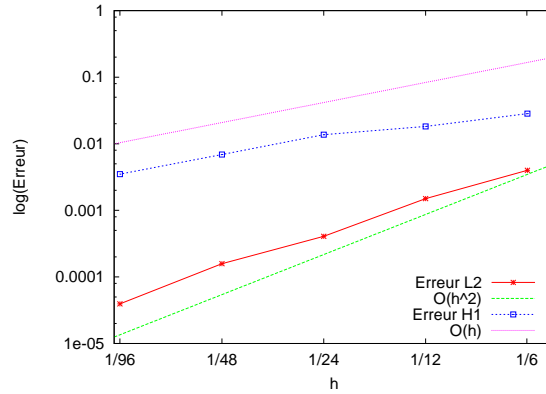


FIGURE 1.5 – Convergence de l'erreur en maillage de la méthode des éléments finis pour des inconnues scalaires

Cas test d'arête

Un problème 2D (1.61) (avec $\alpha = 10e-8$ et $\beta = \frac{1}{\mu_0}$), en coordonnées cylindriques, (1.61) associé à des éléments de Whitney d'ordre 1 est désormais considéré. Les degrés de liberté sont les circulations le long des arêtes du maillage. Le comportement numérique de la méthode est évalué sur un disque Fig. 1.6 de centre $(0, 0)$ et de rayon $R = 1m$ en espace et $[0, T]$, où $T \geq 0$ est considéré comme le temps final. Notamment, on choisit $T = 100s$ et un pas de temps $\Delta t = 1s$. La condition initiale est prise comme $u(r, \theta, 0) = 0 \forall (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ le rayon et θ l'angle. Les conditions aux bords sont des conditions de type Dirichlet :

$$\mathbf{u}(1, \theta, t) = (0, 1), \quad \forall (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, T]$$

La solution analytique de ce problème en régime établi est égale à la distance du centre du disque au point considéré (x, y) et est donnée, dans le repère (r, θ) , par l'expression suivante :

$$\mathbf{u}^{\text{ana}}(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{R} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

où R est le rayon maximum du domaine ($R = 1$). Dans ce cas, on définit le module de la solution comme :

$$\|\mathbf{u}^{\text{ana}}(r, \theta)\| = \frac{r}{R} \quad (1.85)$$

Le tableau 1.2 ainsi que les courbes de convergence en maillage Fig.1.8 montrent que les erreurs diminuent avec le raffinement du maillage à l'ordre 2 à la fois en norme L^2

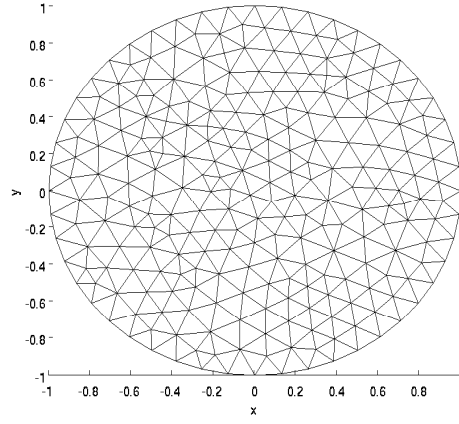


FIGURE 1.6 – Maillage du cas test d'arête

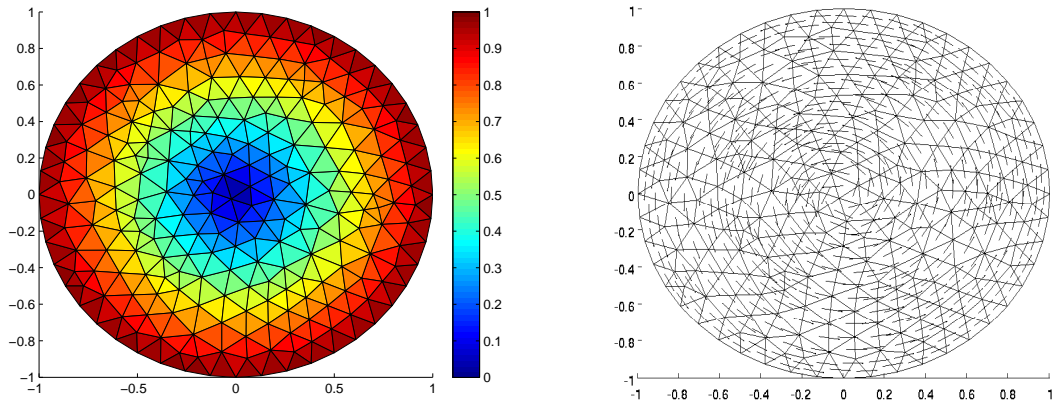


FIGURE 1.7 – Représentation de la solution stationnaire : module du champ (gauche), champ solution (droite)

mais également en norme $H(\mathbf{rot})$. De tels résultats valident les études menées sur la convergence de la MEF couplées à des éléments d'arête [79].

Δx_{EF}	EF \mathcal{P}^1 + Euler Implicite			
	erreur L^2		erreur $H(\mathbf{rot})$	
1/6	1,07E-02	-	3,04E-02	-
1/12	2,70E-03	1,9	7,60E-03	2
1/24	7,98E-04	1,8	2,30E-03	1,7
1/48	2,19E-04	1,9	6,20E-04	1,9
1/96	5,75E-05	1,9	1,63E-04	1,9

TABLE 1.2 – Erreurs et ordres de convergence associés pour un cas 2D d'arête

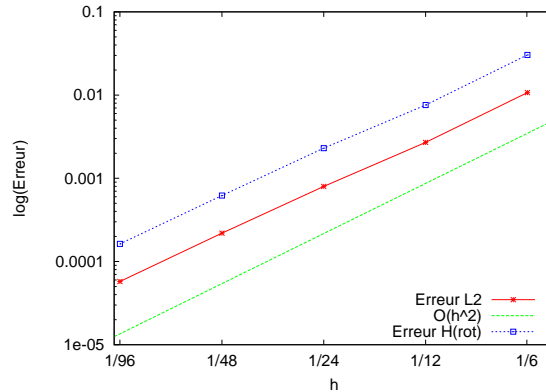


FIGURE 1.8 – Convergence de l’erreur en maillage de la méthode des éléments finis pour des inconnues vectorielles

1.3 Conclusion

Ce chapitre a, dans un premier temps, présenté le cadre physique de cette étude. On rappelle que l’on s’intéresse, dans ce travail, à la modélisation de phénomènes électromagnétiques en régime magnétodynamique. Plus précisément, les équations associées à cette modélisation sont les équations de Maxwell où le temps de propagation est négligeable devant la période temporelle des champs mis en œuvre. Cette étude porte, notamment, sur le calcul effectif des champs ou bien des potentiels électromagnétiques intervenant dans les diverses formulations du problème considéré.

Dans une seconde partie, nous avons décrit les schémas retenus en vue d’approcher les solutions de (1.2)-(1.3)-(1.5)-(1.6). La méthode des éléments finis combinée à des éléments de Whitney pour l’approximation en espace a été décrite pour un problème de type diffusion. L’avancée en temps est quant à elle réalisée grâce à un schéma d’Euler implicite. L’ordre de convergence en maillage de la méthode des éléments finis en espace avec le schéma d’Euler implicite en temps a été mesuré numériquement. Les calculs ont montré que l’ordre théorique était vérifié en pratique. Cette évaluation, tant des schémas que de leur implémentation, est nécessaire dans l’éventualité d’une étude numérique d’une méthode de décomposition appliquée aux modèles.

Dans le chapitre suivant, on décrit différentes méthodes de décomposition de domaine avec ou sans recouvrement entre sous-domaines. Il s’agira de rappeler les travaux existants dans la littérature de façon à motiver la stratégie retenue.

Chapitre 2

Méthodes de décomposition de domaine

Dans ce second chapitre, nous faisons un tour d'horizon des diverses méthodes de décomposition de domaine rencontrées en simulation numérique. Un nombre limité mais néanmoins représentatif de méthodes est présenté afin d'exposer les principales propriétés qui les caractérisent. Des méthodes avec et sans recouvrement ainsi que des méthodes prenant en compte ou non le mouvement sont présentées. L'ensemble des méthodes de ce chapitre se propose de mettre en lumière les principales motivations relatives à la mise en place d'une méthode de décomposition basée sur la méthode mortar avec recouvrement.

Ces dernières années, la modélisation numérique, aussi bien au sein du monde industriel que des organismes de recherche, est devenu une des principales préoccupations. Des méthodes numériques de plus en plus complexes sont développées pour répondre aux challenges de la science et de l'industrie. Ainsi, l'une des réponses à la problématique de la parallélisation d'un problème (mise au point de solveurs efficaces et rapides), se trouve dans les méthodes de décomposition de domaine. L'idée est de découper le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines qui se voient, par la suite, être répartis entre différents processus. Initialement développées pour des problèmes elliptiques simples, ces méthodes ont été étendues à des problèmes plus compliqués (équations non linéaires, équations de propagation, équations de Maxwell), à des configurations physiques complexes (géométries complexes, maillages non-conformes, prise en compte de mouvements), mais également à des exigences machines importantes (résolution simultanée dans les différents domaines, diminuer le temps CPU et l'espace mémoire). C'est dans ce contexte que nombre de méthodes ont été développées en vue de répondre aux diverses problématiques. Pour plus d'informations sur la théorie relative aux méthodes de décomposition de domaine ainsi qu'à leur diversité d'applications, le lecteur est invité à consulter les ouvrages [68, 75, 77, 88, 99]. Deux grandes familles de méthodes peuvent être distinguées : méthodes avec recouvrement de maillages (l'intersection des maillages est non nulle comme présenté à la figure 2.1a) et sans recouvrement (intersection nulle comme les figures 2.1b et 2.1c). Par la suite, nous choisissons de présenter une liste de méthodes de décomposition de domaine :

overlapping, interpolation, multiplicateurs de Lagrange, mortar, Arlequin et Schwarz.

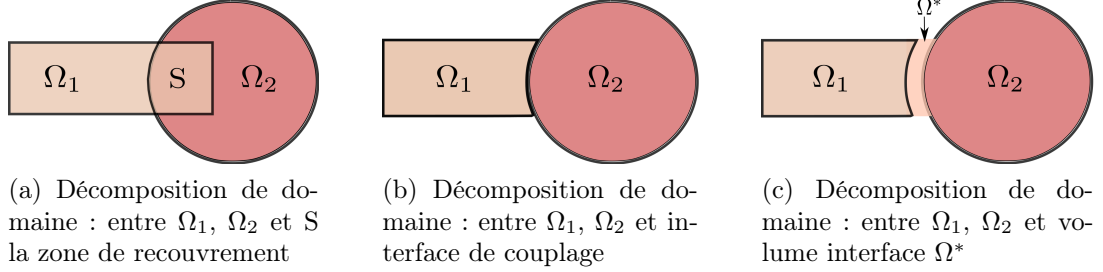


FIGURE 2.1 – Décomposition de domaine

2.1 Overlapping

Dans le domaine de la modélisation électromagnétique, une méthode utilisée pour la prise en compte du mouvement est la méthode overlapping. Cette dernière a été introduite par Tsukerman [104] en 1992 dans le cadre d'une modélisation 2D de machines électriques pour des cas d'inconnues scalaires en maillage quadrangulaire puis pour des maillages triangulaires [20, 73]. Par la suite, elle a été développée pour des problèmes 3D en maillages hexaédriques, tétraédriques [70] et pour des inconnues aussi bien vectorielles que scalaires. On peut, notamment, citer les récents travaux de Zaidi [108], dans le cadre de la modélisation du CND par CF qui ont permis de mettre en avant les avantages de la méthode overlapping.

La méthode overlapping est une technique de décomposition de domaine non-conforme sans recouvrement. Elle se propose de réaliser les transferts d'information entre domaines via des projections nodales à travers une zone Ω^* , séparant les domaines. La présentation de la méthode est ici réalisée pour le cas d'inconnues scalaires.

Afin d'expliquer simplement le principe de la méthode overlapping, on choisit de considérer deux domaines Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega^* = \Omega$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (Fig.2.1c), Γ_{12} et Γ_{21} les frontières des domaines respectifs de Ω_1 et Ω_2 par où se réalise les échanges d'information (Fig.2.2a). On suppose que le même système d'équations est à résoudre dans chacun des domaines, ce qui donne sous forme variationnelle :

trouver les solutions $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in V_1 \times V_2$ telles que

$$i = \{1, 2\}, \mathcal{A}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_i) \quad \forall \mathbf{v}_i \in V_i \quad (2.1)$$

où \mathcal{A} est la forme bilinéaire et \mathcal{L} la forme linéaire associée à la formulation variationnelle du problème considéré. La forme discrète du problème introduit des maillages non-conformes et indépendants entre eux. Les espaces variationnels $(V_i)_{i=1,2}$ sont supposés bien choisis et de dimension égale au nombre de nœuds du domaine sur lequel ils sont définis. Les fonctions de forme aux nœuds $(\mathbf{x}^j)_{j=[1, \mathcal{N}]}$ des domaines sont des fonctions de Whitney d'ordre 0 (1.52) et forment une base de l'espace variationnel telles que :

$$w_i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij}, \quad (1 \text{ si } i = j, 0 \text{ si } i \neq j) \quad (2.2)$$

2.1 Overlapping

Une projection des nœuds de Γ_{12} sur Γ_{21} , ainsi que ceux de Γ_{21} sur Γ_{12} , tend à la création de nœuds fictifs dans le maillage voisin comme illustrée dans la figure 2.2b. Dans ce cas, les fonctions de forme associées aux nœuds des frontières d'échange voient leur domaine de définition étendu jusqu'aux nœuds fictifs. Les espaces variationnels sont directement impactés par ce changement de base, ils sont désormais considérés comme étendus (i.e "étendus aux nœuds fictifs"), notés $(V_i^{\text{étendu}})_{i=1,2}$. Le problème variationnel global s'écrit désormais :

Trouver les solutions $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in V_1^{\text{étendu}} \times V_2^{\text{étendu}}$ telles que

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_i) \quad \forall \mathbf{v}_i \in V_i^{\text{étendu}} \quad (2.3)$$

La connexion des inconnues liées aux deux interfaces est effectuée via le calcul des termes intégraux dans la zone d'intégration. Ces termes intégraux sont calculés pour chaque couple de nœuds dans la zone où les deux fonctions de formes (associées à ces deux nœuds) sont communément non nulles. Par exemple, les termes intégraux associés aux nœuds N_{12} et N_{23} sont calculés dans la zone en damier dans la Fig.2.2c.

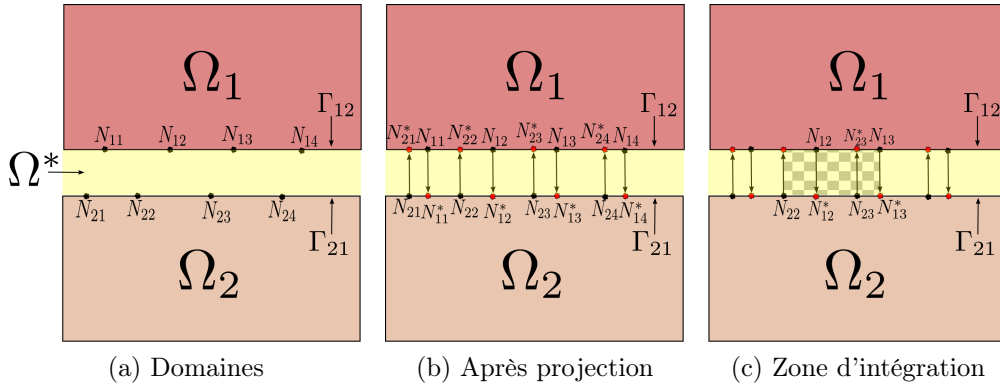


FIGURE 2.2 – Méthode overlapping

La forme matricielle du problème (2.3) est donnée par :

$$i = \{1, 2\}, \quad M_i^{\text{étendu}} \mathbf{U}_i = \mathbf{F}_i^{\text{étendu}} \quad (2.4)$$

où \mathbf{U}_i est le vecteur solution du domaine Ω_i , $M_i^{\text{étendu}}$ et $\mathbf{F}_i^{\text{étendu}}$ sont, respectivement, les matrices MEF et les second membres calculés dans les espaces étendus associés $V_i^{\text{étendu}}$. Finalement, le système matriciel du problème s'exprime comme :

$$\begin{bmatrix} M_1^{\text{étendu}} & C^T \\ C & M_2^{\text{étendu}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{\text{étendu}} \\ \mathbf{F}_2^{\text{étendu}} \end{bmatrix}$$

avec C la matrice de couplage déterminée par les intégrations entre les deux domaines. Au regard du système matriciel, la méthode overlapping présente l'avantage d'effectuer un couplage fort entre domaines (i.e la résolution des problèmes est simultanée dans les sous-domaines). De plus, c'est une méthode qui maintient une précision élevée du calcul global. Cette méthode permet une prise en compte aisée des milieux fins, et du mouvement

dans la modélisation (à chaque nouvelle configuration géométrique seules les fonctions de base des nœuds des frontières d'échanges sont modifiées). Néanmoins, pour des maillages et des mouvements quelconques, réaliser les projections ou définir les zones d'intégrations peut s'avérer compliquer à mettre en œuvre. Cela entraîne d'importantes difficultés de résolution dans le cas de modélisations complexes.

2.2 Interpolation

Une méthode couramment rencontrée dans les décompositions de domaine, 2D et 3D, est la méthode d'interpolation. Elle fait partie des méthodes permettant une décomposition du domaine global en sous-domaines, sans recouvrement, indépendamment maillés et non-conformes. Celle-ci a été développée pour des inconnues scalaires [46, 85] mais également vectorielles [56, 69]. C'est une méthode qui est couramment rencontrée en modélisation numérique.

Les échanges entre deux domaines Ω_1 et Ω_2 s'effectuent par le biais d'une interface de couplage Γ Fig.2.1b (avec $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Gamma$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Gamma$).

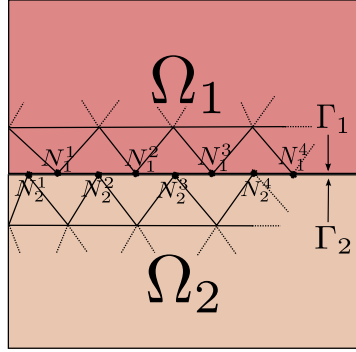


FIGURE 2.3 – Schéma de connexion par interpolation nodale à l'interface

Dans cette méthode, on choisit d'exprimer les inconnues du bord d'un domaine en fonction de l'autre (à titre d'exemple, les nœuds du Γ_2 sont évalués à partir de ceux de Ω_1). Pour ce faire, les nœuds de Γ_2 s'expriment comme une interpolation des nœuds de Γ_1 tels que :

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}^1} \alpha_k \mathbf{u}_1^k \quad (2.5)$$

où \mathbf{u}_i est l'ensemble des inconnues relatives à la frontière Γ_i , \mathbf{u}_j^k le k -ème nœud du domaine Ω_j , \mathcal{N}^j le nombre de nœuds de Ω_j et α_k une fonction d'interpolation préalablement définie. En vue d'affiner l'approximation mise en jeu, des fonctions d'interpolation d'ordre élevé peuvent être choisies [97]. Nous citons, ici, en guise d'exemple les valeurs des fonctions d'interpolation nodales à l'ordre 1 pour le nœud N_2^3 de Fig.2.3 :

$$\mathbf{u}_2^3(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{u}_1^2 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_1^3 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{|N_2^3 N_1^3|}{|N_1^2 N_1^3|} \quad (2.6)$$

Remarquons que dans le cas où les maillages sont conformes (ie les nœuds de Γ_1 et Γ_2 sont confondus) alors $\alpha = 1$.

Les inconnues de Γ_2 s'exprimant en fonction de celles de Γ_1 , elles sont exclues du système final. Sous ces conditions, les matrices M^* , associées aux éléments de bords, s'expriment comme un produit entre une matrice de couplage C (déterminée par la formule d'interpolation (2.5)) et la matrice élémentaire M de l'élément dans le cas conforme :

$$C^T M C = M^* \quad (2.7)$$

La méthode d'interpolation offre de nombreux avantages d'ordre numérique : la matrice du système final est symétrique, le conditionnement n'est pas détérioré et le mouvement est pris en compte en recalculant uniquement les matrices élémentaires des éléments de bords. Néanmoins, cette méthode a été démontrée non optimale (dégradation de la qualité de la solution), elle peut entraîner des instabilités et la convergence en éléments d'arête peut s'avérer douteuse. Comme pour la méthode overlapping, l'interface de couplage ne doit pas être modifiée par le mouvement.

2.3 Multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange [5, 94] est une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement de maillages (Fig.2.1b). Méthode largement répandue dans le domaine de la modélisation électromagnétique, on la rencontre également dans des applications variées [15, 71]. Comme pour les méthodes overlapping et d'interpolation, elle a été développée pour des inconnues scalaires et vectorielles [5].

La décomposition du domaine est identique à celle choisie pour la méthode d'interpolation (Ω_1 et Ω_2 deux domaines non recouverts, Γ l'interface invariante avec le mouvement, $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Gamma$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Gamma$) et le cas présenté est valable pour des inconnues scalaires. Le système d'équations à résoudre est le même dans chacun des domaines. On reprend la formulation variationnelle (2.1) à laquelle on impose une condition de recollement nodal sur Γ qui s'écrit :

$$\mathbf{u}_1|_{\Gamma} = \mathbf{u}_2|_{\Gamma} \quad (2.8)$$

On cherche à minimiser la fonctionnelle portée par (2.1) sous la condition introduite par le multiplicateur de Lagrange, noté λ :

$$\lambda = \mathbf{u}_1|_{\Gamma} - \mathbf{u}_2|_{\Gamma} \quad (2.9)$$

Par la suite, le multiplicateur est soit supprimé en étant remplacé par son expression, soit considéré comme une inconnue du système [57, 76]. Le multiplicateur λ est défini soit sur Γ_1 soit sur Γ_2 (l'espace des multiplicateurs est choisi comme l'espace de discrétisation associé à Ω_1 ou Ω_2). Le choix de l'espace de définition de λ implique de choisir un domaine "maître" dans le calcul. A titre d'exemple, on prend λ discrétisé sur Γ_1 tel que :

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \lambda_n w_1^n \quad (2.10)$$

Il vient les matrices de couplage C et D données par :

$$C(n, m) = \int_{\Gamma} w_1^n w_1^m d\Gamma \quad (2.11)$$

$$D(n, p) = \int_{\Gamma} w_1^n w_2^p d\Gamma \quad (2.12)$$

avec w_i^n la fonction de Whitney d'ordre 0 du n -ième nœud du domaine Ω_i .

En vue de poser le système matriciel du problème considéré, il est à distinguer les nœuds internes (notés I) des nœuds de Γ (notés Γ). Le système algébrique global s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} M_1^{II} & M_1^{I\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ M_1^{\Gamma I} & M_1^{\Gamma\Gamma} & 0 & 0 & C^T \\ 0 & 0 & M_2^{II} & M_2^{I\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & M_2^{\Gamma I} & M_2^{\Gamma\Gamma} & -D^T \\ 0 & C & 0 & -D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^I \\ \mathbf{U}_1^{\Gamma} \\ \mathbf{U}_2^I \\ \mathbf{U}_2^{\Gamma} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^I \\ 0 \\ \mathbf{F}_2^I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où \mathbf{U}_j^I est le vecteur des degrés de liberté internes du domaine Ω_j et \mathbf{U}_j^{Γ} celui des degrés de liberté sur Γ_j . Les matrices données par la MEF sur les domaines Ω_1 et Ω_2 s'écrivent, respectivement :

$$\begin{pmatrix} M_1^{ii} & M_1^{i\Gamma} \\ M_1^{\Gamma i} & M_1^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} M_2^{ii} & M_2^{i\Gamma} \\ M_2^{\Gamma i} & M_2^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange présente l'avantage de prendre en compte le mouvement avec un minimum de recalcul à chaque nouvelle position des domaines. En effet, à chaque nouvelle configuration géométrique, seule la matrice de couplage D est à recalculer. De plus, la matrice du système final est symétrique. Néanmoins, elle accroît la nombre de terme non nuls mais aussi la taille du système à résoudre. La matrice n'est pas définie positive ce qui empêche l'utilisation d'algorithmes classiques de résolution (type Gradient Conjugué). Cette méthode impose que l'interface de couplage soit invariante avec le mouvement.

2.4 Méthode des éléments finis avec joints

La méthode des éléments finis avec joints (dite “mortar element method” en anglais) (MEM) a été introduite par Bernardi, Maday et Patera [16, 17] dans le cadre d'approximation par la MEF de problèmes 2D elliptiques. Elle a par la suite été étendue, toujours pour un problème elliptique, à des maillages non-conformes et indépendants en 2D et 3D [9, 11, 107]. C'est une méthode aujourd'hui largement répandue dans le domaine de la décomposition de domaine. Elle est utilisée dans de nombreuses applications numériques [7, 13, 18, 49, 59]. La MEM a été développée pour des inconnues scalaires et vectorielles dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell pour des maillages 2D et 3D [10, 12, 26, 89].

C'est une technique non-conforme de décomposition de domaine reposant sur une partition du domaine d'étude en sous-domaines sans recouvrement. Les discrétisations entre sous-domaines peuvent ainsi être non-conformes et complètement indépendantes. La décomposition de domaine est la même que pour les méthodes précédentes (Fig.2.1b). Le couplage est réalisé à l'interface Γ entre Ω_1 et Ω_2 par l'intermédiaire d'un opérateur de projection (projection L^2). La méthode se rapproche de la méthode par multiplicateurs de Lagrange en ce sens où la condition (2.8) est également vérifiée. La différence notable avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange est le choix de l'espace dans lequel vivent ces multiplicateurs. En effet, un espace de multiplicateurs bien adapté assure l'optimalité ainsi que la stabilité de la méthode. Des critères de choix ainsi que la définition d'espace bien adapté sont proposés dans [9, 89, 107]. De plus, cette alternative entraîne que la matrice du système final est désormais globalement creuse et définie positive, ce qui lève la restriction sur l'utilisation des techniques de résolution classiques imposées dans la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On notera que la MEM peut, également, être introduite à partir de l'écriture matricielle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange en écrivant les coefficients de Lagrange en fonction des inconnues du système [5].

Néanmoins, comme pour les méthodes précédentes, l'interface de couplage doit être invariante avec le mouvement, ce qui n'est pas toujours possible.

2.5 Arlequin

La méthode Arlequin présentée par [14, 92] est une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement développée dans le cadre de modélisations de structures multi-échelles. Cette méthode repose, notamment, sur un échange d'information entre les domaines Ω_1 et Ω_2 via une zone de recollement $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ (Fig.2.1a).

La solution \mathbf{u} sur le domaine global est composée de la solution \mathbf{u}_1 sur le domaine $\Omega_1 \setminus \Omega_2$, de la solution \mathbf{u}_2 sur $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ et d'une pondération des solutions \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 telles que :

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_1 & \text{sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \\ \mathbf{u}_2 & \text{sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \\ \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 & \text{sur } S \end{cases} \quad (2.14)$$

où α_1 et α_2 représentent des fonctions de pondération qui forment une partition de l'unité sur le domaine global :

$$\alpha_1 = 1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 \quad (2.15)$$

$$\alpha_2 = 1 \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 \quad (2.16)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ sur } S \quad (2.17)$$

Ces fonctions de pondération permettent, notamment, de contrôler le niveau de mélange des solutions \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 dans la zone de recouvrement.

En partant d'une formulation variationnelle classique du problème qui s'écrit :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.18)$$

avec la solution $\mathbf{u} \in V$ à identifier, \mathcal{A} une forme bilinéaire, \mathcal{L} une forme linéaire et V l'espace variationnel relatif au problème considérée. L'introduction de termes de couplage, noté c , permet de poser le problème variationnel sur le domaine global décomposé entre les différents sous-domaines décrits précédemment :

Trouver $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \lambda) \in V_1 \times V_2 \times M$ tels que :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + c(\lambda, \mathbf{v}_1) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1) \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1 \quad (2.19)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + c(\lambda, \mathbf{v}_2) = \mathcal{L}(\mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2 \quad (2.20)$$

$$c(\mu, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 \quad \forall \mu \in M \quad (2.21)$$

avec λ un champ défini dans M (l'espace des multiplicateurs de Lagrange par exemple) qui permet le passage d'information et le terme de couplage c définit comme une projection L^2 . La formulation matricielle du système d'équations (2.19)-(2.21) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & -C_1^T \\ 0 & M_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où M_i est la matrice calculée par la MEF, \mathbf{U}_i le vecteur solution et \mathbf{F}_i le second membre associé au problème sur Ω_i .

La méthode Arlequin fait partie des méthodes avec recouvrement de maillages. C'est une méthode qui, grâce à une projection L^2 des solutions dans la zone de recouvrement, maintient la précision ainsi que la stabilité de la MEF. Par ailleurs, plus la zone de recouvrement est étendue, plus la précision de la méthode est élevée. Elle possède de nombreuses caractéristiques et propriétés communes, sur le plan théorique et numérique, avec les méthodes des multiplicateurs de Lagrange et de mortar. Cependant, elle n'a pas été décrite pour prendre en compte le mouvement lors d'une modélisation. Néanmoins, en cas de mouvement entre les domaines, on remarque que la méthode Arlequin va devoir réévaluer l'ensemble des matrices de couplages pour chacune des positions.

2.6 Schwarz

Parmi les méthodes de décomposition de domaine avec recouvrement, on peut citer la méthode de Schwarz [54]. Initialement développée dans le cadre d'une modélisation de l'équation de Laplace, elle fait désormais figure de référence dans le domaine de la décomposition de domaine et est largement utilisée en simulation numérique [32, 45]. Elle a ainsi été développée pour divers cas physiques et numériques (par exemple pour des inconnues vectorielles [4, 58, 63]).

Elle repose sur une décomposition, avec recouvrement, du domaine d'étude (Fig.2.1a) telle que présentée pour la méthode Arlequin : deux domaines recouverts distincts Ω_1 et Ω_2 . On résout les systèmes d'équations suivants :

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_1 \quad (2.22) \quad \mathbf{L}\mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_2 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \quad (2.23) \quad \mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}_1^{n+1} = \mathbf{u}_2^n \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \quad (2.24) \quad \mathbf{u}_2^{n+1} = \mathbf{u}_1^n \text{ sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \quad (2.27)$$

où \mathbf{L} représente un opérateur de dérivation, \mathbf{u}_i^n la solution au temps n sur le domaine Ω_i , \mathbf{f} le second membre et \mathbf{g} les valeurs aux bords du domaine considéré.

Les conditions de couplage entre les domaines sont imposées fortement au travers de (2.24) dans Ω_1 et de (2.27) dans Ω_2 . De manière discrète, des interpolations nodales sont effectuées afin de ramener l'information du domaine sur le bord ($\Pi_1 : \Omega_2 \rightarrow \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ et $\Pi_2 : \Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1$). Cette méthode étant itérative, elle impose de connaître au moins une valeur au temps initial (\mathbf{u}_1^0 ou \mathbf{u}_2^0). Le système matriciel final du problème donne :

$$\begin{bmatrix} M_1 & C_1 \\ C_2 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}$$

avec C_i la matrice de l'interpolation nodale de Π_i , M_i la matrice de la forme discrète de l'opérateur \mathbf{L} pour le domaine Ω_i et \mathbf{F}_i le second membre dans Ω_i . Les maillages des domaines Ω_1 et Ω_2 étant non-conformes et indépendants, les interpolations Π_1 et Π_2 ne sont pas identiques ce qui amène $C_1 \neq C_2$. La matrice du système n'est donc, en général, pas symétrique. Ce qui peut limiter l'emploi des algorithmes de résolution.

Cette méthode maintient la précision et la stabilité de la MEF. On remarque, par ailleurs, que l'utilisation d'un recouvrement entre les sous-domaines permet d'améliorer la convergence. A notre connaissance, la méthode Schwarz n'a pas été développée pour la prise en compte du mouvement entre les sous-domaines. Cependant, en présence de mouvement, on remarque que la méthode devra, d'une part, recalculer l'ensemble des matrices de couplages, et d'autre part, effectuer le nombre d'itérations attendu pour chaque nouvelle position ce qui peut s'avérer très coûteux en temps et ressource machine.

2.7 Comparaison des méthodes

On résume dans le tableau 2.1 les avantages et inconvénients de chacune des méthodes présentées précédemment. Parmi les méthodes sans recouvrement de domaines, la MEM apparaît comme la technique la plus efficace mais également la plus souple pour prendre en compte des maillages quelconques et des mouvements complexes. Les méthodes avec recouvrement présentent l'avantage principal de s'affranchir des interfaces de glissements ou encore des volumes d'échange (comme pour la méthode overlapping) qui ne sont pas toujours identifiables dans le cas de géométries complexes. Il paraît alors judicieux de combiner les avantages de la MEM avec l'avantage des méthodes avec recouvrement en vue d'étendre les possibilités d'applications des méthodes de décomposition de domaine.

	overlapping	interpolation	multiplicateurs de Lagrange	MEM	Arlequin	Schwarz
Recouvrement	non	non	non	non	oui	oui
Prise en compte du mouvement	oui	oui	oui	oui	non	non
Couplage fort	oui	oui	oui	oui	oui	non
Inconnues scalaires	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Inconnues vectorielles	oui	oui	oui	oui	non	oui
matrice symétrique	oui	oui	oui	oui	oui	non
matrice définie positive	oui	non	non	oui	oui	oui
augmente la dimension du système	non	non	oui	oui	oui	non
optimalité	oui	non	oui	oui	oui	oui
stabilité	oui	non	oui	oui	oui	oui

TABLE 2.1 – Synthèse présentant les caractéristiques des méthodes de décomposition de domaine présentées dans ce chapitre

2.8 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire la notion de décomposition de domaine entre maillages non-conformes et indépendants, en s'appuyant sur les travaux présents dans la littérature. Par ailleurs, il a été présenté différentes approches envisageables mais également les problèmes théoriques et numériques qu'elles génèrent. Ceci permet, à ce stade, de préciser à la fois la stratégie retenue en vue de mettre au point un algorithme de décomposition de domaine avec recouvrement prenant en compte le mouvement ainsi que sa méthode de validation.

A ce propos, la méthode envisagée dans la suite de ce travail s'appuie sur le cadre théorique relatif à la MEM combiné aux avantages mis en lumière par les méthodes avec recouvrement. Le théorie autour de la MEM étant très importante dans la littérature elle va nous servir de support quant à l'élaboration d'une nouvelle méthode et de ses propriétés a priori. Il s'agit également de proposer une manière de procéder et d'en évaluer son comportement a posteriori.

En résumé, nous rapellons que l'approche retenue est fondée sur :

- la prise en compte du mouvement avec l'utilisation de maillages non-conformes et totalement indépendants se recouvrant, en vue de minimiser les contraintes sur la génération des maillages
- la prise en compte réciproque de l'information d'un domaine sur l'autre au travers d'une interface que l'on aura déterminée
- la mise en œuvre d'un algorithme de couplage stable et optimal basé sur la MEM
- le développement d'une méthode pour des inconnues scalaires mais également vectorielles

On proposera également une étude numérique de l'ordre de convergence en maillage de la méthode proposée. En effet, on rappelle que le but est de pouvoir éviter le remaillage systématique de l'ensemble du domaine d'étude tout en conservant une précision élevée du calcul de la MEF.

Avant de mettre en œuvre cette démarche dans des cas 2D, on se propose, dans le chapitre qui suit, d'étudier, dans un cadre théorique, la méthode envisagée.

Chapitre 3

Méthodes des éléments avec joints avec recouvrement

Dans ce chapitre, on pose le cadre théorique de la méthode de décomposition de domaine avec recouvrement mise en place. Cette étude est menée dans le contexte d'une approximation magnétodynamique 2D des équations de Maxwell pour des cas d'inconnues scalaires et vectorielles.

3.1 Avant propos

La méthode présentée dans ce chapitre est basée sur la théorie de la MEM, néanmoins elle lève la contrainte portant sur la connaissance d'une interface invariante avec le mouvement. Rappelons que en fonction de la configuration géométrique et physique étudiée, il n'est pas toujours aisé de définir une telle interface de couplage. Afin de lever la contrainte en maillage quant à la connaissance de cette interface, on étend la MEM au cas de domaines recouverts. De part la physique étudiée, des échanges réciproques d'information entre domaines sont également à considérer. L'idée d'une MEM avec recouvrement a été abordée pour des inconnues scalaires lors de la résolution d'un Laplacien [2, 31, 51]. Elle a, par la suite, été étendue, théoriquement, aux équations de la magnétodynamique [50, 53]. Cependant, ces différentes configurations contiennent implicitement les échanges bidirectionnels d'information. Dans [52, 90, 91], il est présenté une MEM avec recouvrement telle que l'échange réalisé est du domaine considéré fixe vers le domaine considéré mobile. La méthode de décomposition de domaine de ce chapitre est développée dans le contexte d'échanges réciproques d'information entre sous-domaines pour des inconnues scalaires mais aussi vectorielles.

3.2 Cadre de l'étude

La méthode est décrite pour les équations de Maxwell 2D en régime magnétodynamique (1.2)-(1.3)-(1.5)-(1.6). Plus particulièrement, on développe la méthode pour la

formulation en potentiel vecteur magnétique modifié (1.33) de ces équations. Pour rappel, cette équation dépend uniquement d'un potentiel vecteur \mathbf{A} qui est introduit par la relation $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

Le domaine global d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ peut contenir des parties conductrices ($\sigma \geq 0$). La source \mathbf{J}_0 est à support compact dans Ω (Fig.3.1).

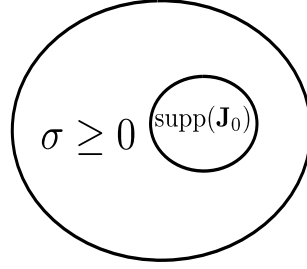


FIGURE 3.1 – Domaine global d'étude Ω

3.3 Décomposition de domaine

Le domaine borné Ω est décomposé entre un domaine qui reste fixe avec le mouvement Ω_F (Fig.3.2a) et un domaine mobile Ω_M (Fig.3.2b), de frontière $\gamma = \partial\Omega_M$, qui sont tels que :

$$\text{supp}(\mathbf{J}_0) \subset \Omega_M, \quad \bar{\Omega}_M \subset \Omega, \quad \Omega_F = \Omega \setminus \bar{\Omega}_M \quad (3.1)$$

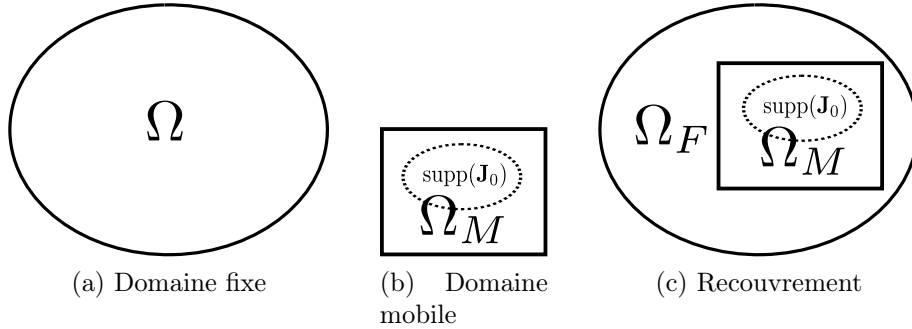


FIGURE 3.2 – Décomposition de domaine

Sous cette configuration, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} du domaine Ω est décrit comme une composition de potentiel entre Ω_F et Ω_M :

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A}_F & \text{sur } \Omega_F \\ \mathbf{A}_M & \text{sur } \Omega_M \end{cases} \quad (3.2)$$

3.4 Décomposition de domaine - Formulations

Dans la suite de ce chapitre, et afin d'enlever toute ambiguïté possible entre les notations, on choisit de renommer l'inconnue \mathbf{A} en la notation standard \mathbf{u} . La solution globale

sur Ω est, alors, donnée par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_F, \mathbf{u}_M)$.

Par ailleurs, on distingue désormais le problème d'inconnues scalaires de celui d'inconnues vectorielles. En effet, les formulations, les espaces topologiques ainsi que les opérateurs de projection mis en jeu ne sont pas identiques ce qui impose une distinction dans le raisonnement.

Le cas scalaire est extrait à partir du champ $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$ qui est inscrit dans le plan $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ tel que $\mathbf{B} = (B_x(\mathbf{x}, t), B_y(\mathbf{x}, t), 0)$. Par la relation $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, on trouve $\mathbf{A} = (0, 0, u(\mathbf{x}, t))$ avec $u \in \mathbb{R}$ ce qui pose la formulation scalaire.

Pour la formulation vectorielle, l'induction magnétique \mathbf{B} est perpendiculaire au plan $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

3.4.1 Formulations fortes

On rencontre dans la littérature, l'étude en terme d'existence et d'unicité, de problèmes associés à des formulations en régime harmonique en présence de décomposition de domaine ou non [1, 40, 41, 95, 96]. On propose, dans un premier temps, de présenter la formulation en potentiel magnétique modifié où la décomposition du domaine Ω est prise en compte.

Cas nodal

On cherche à résoudre dans le domaine global $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la relation :

$$\partial_t \sigma u(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla u(\mathbf{x}, t)) = J_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.3)$$

On cherche à décomposer cette équation entre les différents sous-domaines du problème. Pour ce faire, l'équation précédente est décomposée en un système d'équations qui s'écrit :

$$\partial_t \sigma u_F(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla u_F(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \times]0, T[\quad (3.4)$$

$$\partial_t \sigma u_M(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla u_M(\mathbf{x}, t)) = J_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega_M \times]0, T[\quad (3.5)$$

$$u_F(\mathbf{x}, t) = u_M(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \gamma \times]0, T[\quad (3.6)$$

$$\mu^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u_F(\mathbf{x}, t) = \mu^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u_M(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \gamma \times]0, T[\quad (3.7)$$

$$u_F(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\quad (3.8)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.9)$$

avec $J_0 \in L^2([0, T[\times \Omega_M)$ et $\partial_{\mathbf{n}}$ la projection de la normale du gradient de u sur γ .

Les expressions (3.4) et (3.5) représentent les équations aux dérivées partielles qui sont résolues dans les domaines Ω_F et Ω_M . A ces équations s'ajoutent une condition de bord, de type Dirichlet homogène (3.8), et une condition initiale (3.9). Les conditions de transmissions entre domaine sont exprimées par (3.6) et (3.7). La condition (3.6) impose la continuité de la solution à travers γ (continuité de la composante normale de \mathbf{B}), quant à (3.7) elle assure, par l'égalité des flux, la continuité de la composante tangentielle de \mathbf{H} entre les domaines.

Cas vectoriel

Dans le cas d'inconnues vectorielles, le problème à résoudre dans le domaine global est donné par :

$$\partial_t \sigma \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

La décomposition de Ω en sous-domaines distincts (3.1) porte à définir le système d'équations suivant :

$$\partial_t \sigma \mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t) - \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_F \times]0, T[\quad (3.11)$$

$$\partial_t \sigma \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) - \mathbf{rot} (\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } \Omega_M \times]0, T[\quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t) \cdot \tau_\gamma = \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) \cdot \tau_\gamma \quad \text{sur } \gamma \times]0, T[\quad (3.13)$$

$$\mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t) = \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur } \gamma \times]0, T[\quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}_F(\mathbf{x}, t) \cdot \tau_{\partial\Omega} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (3.16)$$

où $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{L}^2(]0, T[\times \Omega_M)$ et τ_γ le vecteur tangent unitaire à γ . Les équations (3.11)-(3.12) sont, respectivement, résolues dans Ω_F et Ω_M . Le système est complété par une condition aux bords (3.15) et une condition initiale (3.16). Les conditions de couplage entre les domaines sont données par (3.13) et (3.14) qui assurent la conservation de la composante normale de \mathbf{B} et tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} .

3.4.2 Formulations variationnelles

La partie qui suit définit les différents espaces intervenant dans l'analyse de la méthode présentée ici. Des résultats quant à l'existence et l'unicité d'une solution dans le domaine décomposé sont exposés.

Cas nodal

La solution sur le domaine global u est définie comme la composée de la solution u_F sur Ω_F et u_M sur Ω_M . De ce fait, on pose l'espace H^* de H^1 telle que :

$$H^*(\Omega) = H^1(\Omega_F) \times H^1(\Omega_M) \quad (3.17)$$

$$\|u\|_*^2 = \|u\|_{1,\Omega_F}^2 + \|u\|_{1,\Omega_M}^2 \quad \forall u \in H^*(\Omega) \quad (3.18)$$

$$|u|_*^2 = |u|_{1,\Omega_F}^2 + |u|_{1,\Omega_M}^2 \quad \forall u \in H^*(\Omega) \quad (3.19)$$

avec la norme ainsi décrite, l'espace $H^*(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On a également :

$$H_0^*(\Omega) := \{u \in H^*(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (3.20)$$

L'espace fonctionnel \mathcal{U} dans lequel est décrit, au temps t , la solution u s'écrit :

$$\mathcal{U} = \{u = (u_F, u_M) \in H_0^*(\Omega) \text{ telle que } u_F(\mathbf{x}) = u_M(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \gamma\}.$$

Cet espace est dépendant de la variable temporelle t , donc pour tout temps t on a $u \in \mathcal{U}$. La formulation variationnelle associée au problème (3.4)-(3.9) est alors donnée par : trouver $u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ tel que :

$$\partial_t(\sigma u_F, v)_{0, \Omega_F} + a_{\Omega_F}(u_F, v) = (0, v)_{0, \Omega_F}, \quad v \in H_{0,0}^1(\Omega_F) \quad (3.21)$$

$$\partial_t(\sigma u_M, v_M)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_M}(u_M, v_M) = (J_0, v_M)_{0, \Omega_M}, \quad v_M \in H_0^1(\Omega_M) \quad (3.22)$$

avec $a_D(u, v) = \int_D \mu^{-1} \nabla u \cdot \nabla v$ et $D \in \{\Omega_F, \Omega_M\}$. Les espaces variationnels qui régissent cette formulation sont :

$$H_{0, u_M}^1(\Omega_F) := \{v_F \in H^1(\Omega_F) : v_F|_\gamma = u_M|_\gamma \text{ et } v_F|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (3.23)$$

$$H_{0,0}^1(\Omega_F) := \{v_F \in H^1(\Omega_F) : v_F|_\gamma = 0 \text{ et } v_F|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (3.24)$$

$$H_{u_F}^1(\Omega_M) := \{v_M \in H^1(\Omega_M) : v_M|_\gamma = u_F|_\gamma\} \quad (3.25)$$

$$H_0^1(\Omega_M) := \{v_M \in H^1(\Omega_M) : v_M|_\gamma = 0\} \quad (3.26)$$

Le problème peut également s'écrire sous la forme d'une seule égalité telle que : trouver $u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ tel que $\forall v_F \in H_{0,0}^1(\Omega_F)$ et $\forall v_M \in H_0^1(\Omega_M)$

$$\partial_t(\sigma u_F, v_F)_{0, \Omega_F} + \partial_t(\sigma u_M, v_M)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_F}(u_F, v_F) + a_{\Omega_M}(u_M, v_M) = (J_0, v_M)_{0, \Omega_M} \quad (3.27)$$

Autrement dit, on a la forme générale suivante :

$$\partial_t(\sigma(u_F, u_M), (v_F, v_M))_{0, \Omega} + a_\Omega((u_F, u_M), (v_F, v_M)) = ((0, J_0), (v, v_M))_{0, \Omega} \quad (3.28)$$

avec $((0, J_0), (v, v_M))_{0, \Omega} = (J_0, v_M)_{0, \Omega_M}$. La forme bilinéaire $a_\Omega(u, v) = a_{\Omega_F}(u_F, v_F) + a_{\Omega_M}(u_M, v_M)$ est symétrique. De plus, elle est continue et elliptique ($C = 1$ constante d'ellipticité). Comme $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il existe une suite croissante de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j$ et une base hilbertienne orthonormale de vecteurs propres (b_i) telles que :

$$\forall v \in \mathcal{U}, \quad a_\Omega(b_i, v) = \lambda_i(b_i, v) \quad (3.29)$$

Théorème. Soient T un réel positif et $J_0 \in L^2([0, T] \times \Omega_M)$. Alors le problème (3.28) possède une seule et unique solution $u \in L^2(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$.

Démonstration. On commence par démontrer l'unicité de la solution du problème variationnel (3.28). Pour ce faire, on considère les fonctions variables du temps, à valeurs de $L^2(0, T)$ dans \mathbb{R} :

$$t \mapsto (u(t), v)_{0, \Omega}, \quad t \mapsto a_\Omega(u(t), v), \quad t \mapsto (J_0(t), v)_{0, \Omega_M}$$

avec $v \in \mathcal{U}$ ne dépendant pas du temps.

On a extrait une base orthonormale de $L^2(\Omega)$, donc on peut écrire u solution de (3.28) comme :

$$\forall t \in [0, T], \quad u(t) = \sum_{i \geq 1} (u(t), b_i) b_i \quad (3.30)$$

Par (3.29) et comme $u(t) \in \mathcal{U}$, on a :

$$a_\Omega(u(t), b_i) = \lambda_i(u(t), b_i) \quad (3.31)$$

On remplace v par b_i et en posant $\alpha_i(t) = (u(t), b_i)$, on a l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\partial_t \alpha_i(t) + \lambda_i \alpha_i(t) = (J_0(t), b_i)_{0, \Omega_M} \quad (3.32)$$

$$\alpha_i(0) = 0 \quad (3.33)$$

La solution est donnée par :

$$\alpha_i(t) = \int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \quad (3.34)$$

En injectant (3.34) dans (3.30), il vient que u est somme de la série :

$$u(t) = \sum_{i \geq 1} \left(\int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \right) b_i \quad (3.35)$$

Ce résultat assure l'unicité de la solution u de (3.28).

Il reste à montrer l'existence d'une telle solution. A cet effet, on choisit de montrer que la série (3.35) converge vers la solution u .

Soit l'espace $V_m \subset \mathcal{U}$ engendré par les m vecteurs propres b_1, \dots, b_m ($m > 1$). On réécrit le problème (3.32)-(3.33) comme :

trouver $u_m : t \in [0, T] \mapsto u_m(t) \in V_m$ tel que : $\forall v \in V_m$

$$\partial_t (u_m(t), v) + a(u_m(t), v) = (J_0(t), v)_{0, \Omega_M} \quad (3.36)$$

$$u_m(0) = 0 \quad (3.37)$$

Ce qui par le résultat précédent (3.35), donne la solution :

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m \left(\int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \right) b_i \quad (3.38)$$

On souhaite montrer que la suite (u_m) est une suite de Cauchy dans $L^2(0, T; \mathcal{U})$ et $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$. Soient les entiers $p \geq m \geq 1$ et comme (b_i) est une base hilbertienne orthonormale dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$|u_p(t) - u_m(t)| = \left(\sum_{i=m+1}^p \left(\int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.39)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left(\int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \right)^2 \leq \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M}^2 d\theta \quad (3.40)$$

Il vient :

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{t \in [0, T]} |u_p(t) - u_m(t)| \leq \left(\frac{1}{2\lambda_i} \int_0^t (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M}^2 d\theta \right)^{1/2} \quad (3.41)$$

La forme bilinéaire a est elliptique de constante $C = 1$ et on a l'égalité suivante :

$$a(u_p(t) - u_m(t), u_p(t) - u_m(t)) = \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left(\int_0^t (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M}^2 d\theta \right)^2 \quad (3.42)$$

ce qui donne :

$$\|u_p(t) - u_m(t)\|^2 \leq 2 \sum_{i=m+1}^p \lambda_i \left(\int_0^t \exp(-\lambda_i(t-\theta)) (J_0(\theta), b_i)_{0, \Omega_M} d\theta \right)^2 \quad (3.43)$$

On intègre sur $[0, T]$ et par majoration on a :

$$\int_0^T \|u_p(t) - u_m(t)\|^2 dt \leq \sum_{i=m+1}^p \left(T \int_0^T (J_0(t), b_i)_{0, \Omega_M}^2 dt \right) \quad (3.44)$$

Comme $J_0 \in L^2([0, T] \times \Omega_M)$, on a :

$$\|J_0\|_0^2 = \sum_{i \geq 1} \int_0^T (J_0(t), b_i)_{0, \Omega_M}^2 dt \leq \infty \quad (3.45)$$

d'où

$$\lim_{m, p \rightarrow \infty} \sum_{i=m+1}^p \int_0^T (J_0(t), b_i)_{0, \Omega_M}^2 dt = 0 \quad (3.46)$$

Finalement, on trouve :

$$\lim_{m, p \rightarrow \infty} \|u_p(t) - u_m(t)\|_{\mathcal{C}^0} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{m, p \rightarrow \infty} \|u_p(t) - u_m(t)\|_0 = 0 \quad (3.47)$$

La suite (u_m) est une suite de Cauchy dans $L^2(0, T; \mathcal{U})$ et $\mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$. La suite converge vers la même limite dans chacun de ces espaces. De plus, on prouve aisément que u est solution de l'équation (3.28) au sens des distributions sur $]0, T[$. Ce qui finit de démontrer l'existence d'une solution. □

Cas vectoriel

La solution \mathbf{u} sur le domaine global est définie comme la composée de la solution \mathbf{u}_F sur Ω_F et \mathbf{u}_M sur Ω_M . Soit l'espace H^* de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ telle que :

$$H^*(\mathbf{rot}, \Omega) = H(\mathbf{rot}, \Omega_F) \times H(\mathbf{rot}, \Omega_M) \quad (3.48)$$

$$\|\mathbf{u}\|_*^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_F}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_M}^2 \quad (3.49)$$

$$|\mathbf{u}|_*^2 = |\mathbf{u}|_{\mathbf{rot}, \Omega_F}^2 + |\mathbf{u}|_{\mathbf{rot}, \Omega_M}^2 \quad (3.50)$$

L'espace $H^*(\mathbf{rot}, \Omega)$, avec la norme précédente, est un espace de Hilbert. De plus, on pose :

$$H_0^*(\mathbf{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in H^*(\mathbf{rot}, \Omega) : \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\} \quad (3.51)$$

L'espace fonctionnel dans lequel est définie la solution \mathbf{u} du problème (3.11)-(3.16), au temps t , s'exprime comme :

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_F, \mathbf{u}_M) \in H_0^*(\mathbf{rot}, \Omega) \text{ telle que } \mathbf{u}_F \cdot \tau_\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_M(\mathbf{x}) \cdot \tau_\gamma(\mathbf{x}, t) \forall \mathbf{x} \in \gamma\}$$

La formulation variationnelle associée au problème s'écrit :

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ tel que :

$$\partial_t(\sigma \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F)_{0, \Omega_F} + a_{\Omega_F}(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) = (0, \mathbf{v}_F)_{0, \Omega_F}, \quad \forall \mathbf{v}_F \in H_{0,0}(\mathbf{rot}, \Omega_F) \quad (3.52)$$

$$\partial_t(\sigma \mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_M}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) = (\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_M)_{0, \Omega_M}, \quad \forall \mathbf{v}_M \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_M) \quad (3.53)$$

avec $a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D \mu^{-1} \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v}$ avec $D \in \{\Omega_F, \Omega_M\}$. Les espaces variationnels qui interviennent dans cette formulation sont :

$$H_{0, \mathbf{u}_M}(\mathbf{rot}, \Omega_F) := \{\mathbf{v}_F \in H(\mathbf{rot}, \Omega_F) : \mathbf{v}_F \cdot \tau_\gamma = \mathbf{u}_M \cdot \tau_\gamma \text{ et } \mathbf{v}_F \cdot \tau_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\} \quad (3.54)$$

$$H_{0,0}(\mathbf{rot}, \Omega_F) := \{\mathbf{v}_F \in H(\mathbf{rot}, \Omega_F) : \mathbf{v}_F \cdot \tau_\gamma = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{v}_F \cdot \tau_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\} \quad (3.55)$$

$$H_{\mathbf{u}_F}(\mathbf{rot}, \Omega_M) := \{\mathbf{v}_M \in H(\mathbf{rot}, \Omega_M) : \mathbf{v}_M \cdot \tau_\gamma = \mathbf{u}_F \cdot \tau_\gamma\} \quad (3.56)$$

$$H_0(\mathbf{rot}, \Omega_M) := \{\mathbf{v}_M \in H(\mathbf{rot}, \Omega_M) : \mathbf{v}_M \cdot \tau_\gamma = \mathbf{0}\} \quad (3.57)$$

Le problème peut également s'exprimer sous forme d'une seule égalité :

trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ tel que $\forall \mathbf{v}_F \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_F)$ et $\forall \mathbf{v}_M \in H_0(\mathbf{rot}, \Omega_M)$

$$\partial_t(\sigma \mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F)_{0, \Omega_F} + \partial_t(\sigma \mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_F}(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) + a_{\Omega_M}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) = (\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_M)_{0, \Omega_M} \quad (3.58)$$

Ramenée sur le domaine global Ω on a :

$$\partial_t(\sigma(\mathbf{u}_F, \mathbf{u}_M), (\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_M))_{0, \Omega} + a_\Omega((\mathbf{u}_F, \mathbf{u}_M), (\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_M)) = ((\mathbf{0}, \mathbf{J}_0), (\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_M))_{0, \Omega} \quad (3.59)$$

avec $((\mathbf{0}, \mathbf{J}_0), (\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_M))_{0, \Omega} = (\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_M)_{0, \Omega_M}$. La forme bilinéaire $a_\Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_{\Omega_F}(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) + a_{\Omega_M}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)$ est symétrique et continue, avec $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$.

Théorème. Soit T un réel positif et $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_M \times]0, T[)$. Alors le problème (3.59) a une seule et unique solution $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0(0, T; \mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^1(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Démonstration. Partant du principe que $H^*(\mathbf{rot}, \Omega)$ est un espace de Hilbert, la démonstration se trouve, alors, être la même que dans le cas scalaire. \square

3.4.3 Problèmes discrets

La MEF repose sur une discrétisation du domaine étudié. En présence de mouvement (qui implique une modification de la géométrie), au sein de la modélisation, il est usuel de remailler autant de fois la globalité du domaine qu'il y a de positions. Cela peut entraîner un coût machine important (temps CPU, ressources mémoire) qui peut s'avérer contraignant dans un cadre industriel. Les méthodes de décomposition de domaine classiques permettent, dans une large majorité des cas, de s'affranchir de ce remaillage. Néanmoins, elle nécessite la connaissance d'une interface d'échange qui ne varie pas avec le mouvement.

Les cas que nous souhaitons considérer sont composés de géométries et de mouvements complexes, ce qui peut rendre la connaissance d'une interface de couplage difficilement identifiable. Sous ces hypothèses, la discrétisation du domaine Ω_F est étendue à Ω (i.e. $\Omega_F = \Omega$) ce qui introduit un recouvrement de maillages entre Ω_F et Ω_M . Par ailleurs, Ω_M contenant la source du système, il est nécessaire d'introduire un échange réciproque entre Ω_F et Ω_M .

Discrétisations

Soient \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h les discrétisations respectives de Ω_F et Ω_M , avec H et h les pas de raffinement définis comme (1.66), telles que :

$$\overline{\bigcup_{T \in \mathcal{T}_H} T} = \overline{\Omega_F} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T} = \overline{\Omega_M} \quad (3.60)$$

En général, on suppose que $H \neq h$ (en pratique on aura $H \geq h$). Ces maillages se recouvrent. De plus, ils sont indépendants et non-conformes, de manière général on a $\mathcal{T}_H \not\equiv \mathcal{T}_h$. La frontière discrétisée γ n'a donc, à priori, pas d'équivalent discret dans Ω_F (i.e que les arêtes de \mathcal{T}_h qui sont sur γ ne coïncident pas avec des arêtes de \mathcal{T}_H , comme illustré dans la figure 3.3).

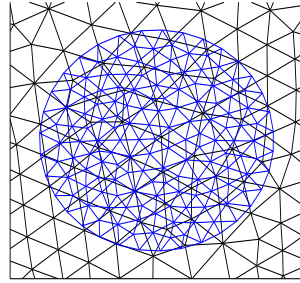


FIGURE 3.3 – Recouvrement de maillages : en noir \mathcal{T}_H et en bleu \mathcal{T}_h

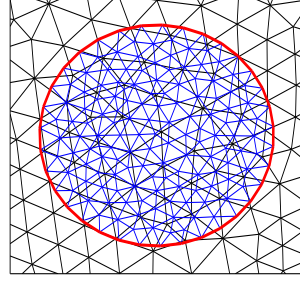
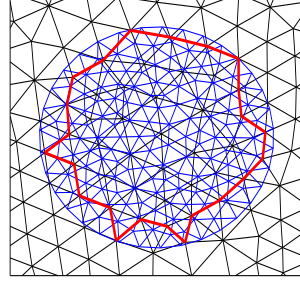
Par la suite, on admet \mathcal{H} comme le pas de discrétisation maximum :

$$\mathcal{H} = \max(H, h)$$

Interfaces de couplage

La MEM avec recouvrement initialement proposée dans [90, 91] effectue les transferts d'information du domaine fixe Ω_F vers le domaine mobile Ω_M par l'intermédiaire de la frontière géométrique discrétisée γ (Fig.3.4). Cette interface ne varie pas avec le mouvement ce qui constitue l'avantage majeur de ce choix.

Afin de réaliser l'échange inverse d'information, de Ω_M vers Ω_F , on identifie une interface de couplage Γ (comme présentée par la figure 3.5) telle que : $\Gamma = \{\text{arête } a \in \mathcal{K}, a \subset \overline{\Omega_M}\}$ où $\mathcal{K} = \{T \in \mathcal{T}_H, T \cap \gamma \neq \emptyset\}$.


 FIGURE 3.4 – Interface d'échange γ de Ω_F vers Ω_M

 FIGURE 3.5 – Interface d'échange Γ de Ω_M vers Ω_F

Cas nodal

La MEF est combinée à des éléments de Whitney d'ordre 0. Les degrés de libertés du système sont portés par les nœuds des maillages. On introduit pour Ω_F et Ω_M les espaces variationnels discrets suivants :

$$X(\Omega_M) = \{v_h \in H^1(\Omega_M), v_{h|T} \in \mathbb{P}^1(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.61)$$

$$X(\Omega_F) = \{v_H \in H^1(\Omega_F), v_{H|T} \in \mathbb{P}^1(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_H\} \quad (3.62)$$

avec $\mathbb{P}^1(T)$ les polynômes qui sont de degré inférieur ou égal à un par rapport à l'ensemble des variables prises sur l'élément T . Par la suite, on exprime les espaces discrets qui prennent en compte les conditions de bord de type Dirichlet mais également, pour Ω_F , une condition supplémentaire sur Γ :

$$X_0(\Omega_F) = \{v_H \in X(\Omega_F), v_{H|\partial\Omega} = 0\} \quad (3.63)$$

$$X_0^{u_h}(\Omega_F) = \{v_H \in X_0(\Omega_F), v_{H|\Gamma} = u_{h|\Gamma}\} \quad (3.64)$$

$$X_0(\Omega_M) = \{v_h \in X(\Omega_M), v_{h|\gamma} = 0\} \quad (3.65)$$

$$X_{u_H}(\Omega_M) = \{v_h \in X(\Omega_M), v_{h|\gamma} = u_{H|\gamma}\} \quad (3.66)$$

On introduit la notion de trace et plus particulièrement les espaces des traces $W(\Gamma)$ et $W(\gamma)$ qui portent, respectivement, l'information de $X(\Omega_F)$ vers Γ et de $X(\Omega_M)$ vers γ

tels que ces espaces vérifient :

$$W(\Gamma) = \{t_\Gamma \text{ application continue lineaire}, t_\Gamma : X(\Omega_F) \rightarrow \Gamma\} \quad (3.67)$$

$$W(\gamma) = \{t_\gamma \text{ application continue lineaire}, t_\gamma : X(\Omega_M) \rightarrow \gamma\} \quad (3.68)$$

Comme les maillages se recouvrent et sont indépendants, les restrictions de $u_H \in X(\Omega_F)$ à γ et de $u_h \in X(\Omega_M)$ à Γ ne sont en général pas dans $W(\gamma)$ et $W(\Gamma)$ (i.e. $u_{H|_\gamma} \notin W(\gamma)$ et $u_{h|\Gamma} \notin W(\Gamma)$). On ne peut résoudre directement le problème d'où l'introduction d'opérateurs de couplage π_F et π_M qui vont permettre de transporter l'information de $X(\Omega_F)$ sur $W(\gamma)$ et de $X(\Omega_M)$ sur $W(\Gamma)$.

Soient π_F et π_M les opérateurs définis par :

$$\begin{aligned} \pi_F : X(\Omega_M) &\rightarrow W(\Gamma) & \pi_M : X(\Omega_F) &\rightarrow W(\gamma) \\ v_h &\mapsto v_{h|\Gamma} & v_H &\mapsto v_{H|\gamma} \end{aligned} \quad (3.69)$$

tels que $\pi_F v_H = v_H$, $\forall v_H \in W(\Gamma)$ et $\pi_M v_h = v_h$, $\forall v_h \in W(\gamma)$.

En introduisant les opérateurs de couplage dans (3.64) et (3.66), on obtient :

$$X_0^{u_h}(\Omega_F) = \{v_H \in X_0(\Omega_F), v_H = \pi_F u_h \text{ sur } \Gamma\} \quad (3.70)$$

$$X_{u_H}(\Omega_M) = \{v_h \in X(\Omega_M), v_h = \pi_M u_H \text{ sur } \gamma\} \quad (3.71)$$

Finalement on a le problème discret suivant : Trouver $(u_H, u_h) \in X_0^{u_h}(\Omega_F) \times X_{u_H}(\Omega_M)$ tel que :

$$\partial_t(\sigma u_H, v_H)_{0, \Omega_F} + a_{\Omega_F}(u_H, v_H) = (0, v_H)_{0, \Omega_F}, \quad v_H \in X_0(\Omega_F) \quad (3.72)$$

$$\partial_t(\sigma u_h, v_h)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_M}(u_h, v_h) = (J_0, v_h)_{0, \Omega_M}, \quad v_h \in X_0(\Omega_M) \quad (3.73)$$

La conséquence immédiate de l'imposition d'une condition faible est de travailler sur des espaces discrets $X_0^{u_h}(\Omega_F)$ et $X_{u_H}(\Omega_M)$ qui ne sont plus des sous-espaces des espaces continus (3.64) et (3.66).

Cas vectoriel

Les inconnues sont désormais portées par les arêtes a des maillages, on combine alors la MEF avec les éléments de Whitney d'ordre 1. On a les espaces variationnels discrets sur Ω_F et Ω_M suivants :

$$X(\Omega_F) = \{\mathbf{v}_H \in H(\mathbf{rot}, \Omega_F), \mathbf{v}_{H|a} \in W^1 \forall a \in \mathcal{T}_H\} \quad (3.74)$$

$$X(\Omega_M) = \{\mathbf{v}_h \in H(\mathbf{rot}, \Omega_M), \mathbf{v}_{h|a} \in W^1 \forall a \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.75)$$

Plus particulièrement, on exprime les espaces précédents pour des conditions de type Dirichlet ainsi que pour une condition de la circulation sur les arêtes de Γ telles que :

$$X_0(\Omega_F) = \{\mathbf{v}_H \in X(\Omega_F), \mathbf{v}_H \cdot \tau_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\} \quad (3.76)$$

$$X_0^{u_h}(\Omega_F) = \{\mathbf{v}_H \in X_0(\Omega_F), \mathbf{v}_H \cdot \tau_\Gamma = \mathbf{u}_h \cdot \tau_\Gamma\} \quad (3.77)$$

$$X_0(\Omega_M) = \{\mathbf{v}_h \in X(\Omega_M), \mathbf{v}_h \cdot \tau_\gamma = \mathbf{0}\} \quad (3.78)$$

$$X_{u_H}(\Omega_M) = \{\mathbf{v}_h \in X(\Omega_M), \mathbf{v}_h \cdot \tau_\gamma = \mathbf{u}_H \cdot \tau_\gamma\} \quad (3.79)$$

La trace d'une fonction vectorielle sur une ligne est représentée par l'ensemble des valeurs de la composante tangentielle aux arêtes de cette ligne. Les espaces des traces sur Γ et γ s'expriment alors comme suit :

$$W(\Gamma) = \{t_\Gamma \text{ application continue lineaire}, t_\Gamma : X(\Omega_F) \rightarrow \Gamma\} \quad (3.80)$$

$$W(\gamma) = \{t_\gamma \text{ application continue lineaire}, t_\gamma : X(\Omega_M) \rightarrow \gamma\} \quad (3.81)$$

Comme pour le cas nodal, les maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h étant complètement indépendants et non-conformes entre eux, les restrictions de $\mathbf{u}_H \in X(\Omega_F)$ à γ et $\mathbf{u}_h \in X(\Omega_M)$ à Γ ne vivent, généralement, pas dans $W(\gamma)$ et $W(\Gamma)$. Afin de vérifier les conditions (3.13) et (3.14) de manière faible, on introduit des opérateurs de transports π_F et π_M qui sont donnés par :

$$\begin{aligned} \pi_F : X(\Omega_M) &\rightarrow W(\Gamma) & \pi_M : X(\Omega_F) &\rightarrow W(\gamma) \\ \mathbf{v}_h &\mapsto \mathbf{v}_H \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma & \mathbf{v}_H &\mapsto \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_\gamma \end{aligned} \quad (3.82)$$

tels que $\pi_F \mathbf{v}_H = \mathbf{v}_h$, $\forall \mathbf{v}_H \in W(\Gamma)$ et $\pi_M \mathbf{v}_h = \mathbf{v}_H$, $\forall \mathbf{v}_h \in W(\gamma)$.

Les espaces (3.77) et (3.79) peuvent s'exprimer de manière faible à l'aide des opérateurs de transport de la forme :

$$X_{\mathbf{0}}^{\mathbf{u}_h}(\Omega_F) = \{\mathbf{v}_H \in X_0(\Omega_F), \mathbf{v}_H \cdot \boldsymbol{\tau}_\Gamma = \pi_F \mathbf{u}_h\} \quad (3.83)$$

$$X_{\mathbf{u}_H}(\Omega_M) = \{\mathbf{v}_h \in X(\Omega_M), \mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}_\gamma = \pi_M \mathbf{u}_H\} \quad (3.84)$$

On pose le problème variationnel discret de (3.52)-(3.53) :

Trouver $(\mathbf{u}_H, \mathbf{u}_h) \in X_{\mathbf{0}}^{\mathbf{u}_h}(\Omega_F) \times X_{\mathbf{u}_H}(\Omega_M)$

$$\partial_t(\sigma \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H)_{0, \Omega_F} + a_{\Omega_F}(\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H) = (0, \mathbf{v}_H)_{0, \Omega_F}, \quad \mathbf{v}_H \in X_0(\Omega_F) \quad (3.85)$$

$$\partial_t(\sigma \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega_M} + a_{\Omega_M}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{J}_0, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega_M}, \quad \mathbf{v}_h \in X_0(\Omega_M) \quad (3.86)$$

3.5 Décomposition de domaine - MEM

La théorie autour de la MEM ayant largement été examinée dans la littérature en scalaire [9, 17, 89, 106] et en vectoriel [12, 64, 65], on se propose par la suite de simplement rappeler (sans les démontrer) les propriétés qui caractérisent les opérateurs de couplage, les espaces des multiplicateurs de Lagrange et les estimations d'erreurs introduits par la méthode.

3.5.1 Projections L2

Il y a nécessité de bien choisir les opérateurs de couplage surtout si les maillages des domaines ne sont pas conformes en Γ et γ . Chaque opérateur, d'un point de vue théorique, se doit d'admettre une erreur de consistance du même ordre que l'erreur d'approximation, mais également, d'un point de vue numérique, de maintenir les caractères creux, positifs et bien conditionnés de la matrice du système algébrique final. Les opérateurs de transport utilisés dans le théorie de la MEM visent à avoir une estimation de l'erreur a priori optimale. Autrement dit l'erreur globale est bornée par la somme des erreurs locales des domaines fois une constante qui ne dépend pas de la solution. Pour ce faire, on choisit d'utiliser des projections de type L^2 dont on donne les caractéristiques.

Cas nodal

Les opérateurs de projection introduits dans (3.69) vérifient les relations de stabilité suivantes [52, 90] :

$$\|\pi_F u\|_{1/2,\Gamma} \leq C_F \|u\|_{1/2,\Gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega_M) \quad (3.87)$$

$$\|\pi_M u\|_{1/2,\gamma} \leq C_M \|u\|_{1/2,\gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega_F) \quad (3.88)$$

et

$$\|u - \pi_F u\|_{1/2,\Gamma} \leq C_F H |u|_{3/2,\Gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega_M) \quad (3.89)$$

$$\|u - \pi_M u\|_{1/2,\gamma} \leq C_M h |u|_{3/2,\gamma} \quad \forall u \in H^1(\Omega_F) \quad (3.90)$$

où $\|\cdot\|_{1/2,I}$ est la norme usuelle sur $H^{1/2}(I)$. avec $I = \{\Gamma, \gamma\}$, C_F et C_M sont des constantes indépendantes, respectivement, de H et h .

Dans le cadre de la théorie de la MEM, les opérateurs de couplage permettent d'imposer faiblement les conditions (3.6) et (3.7) à l'aide d'espace de multiplicateurs de Lagrange $M(\Gamma)$ et $M(\gamma)$, qui s'écrivent comme :

$$\int_{\Gamma} (\pi_F u - u) \nu = 0, \quad u \in X(\Omega_M) \text{ et } \nu \in M(\Gamma) \quad (3.91)$$

$$\int_{\gamma} (\pi_M u - u) \nu = 0, \quad u \in X(\Omega_F) \text{ et } \nu \in M(\gamma) \quad (3.92)$$

où $X(\Omega_M)$ est défini par (3.61) et $X(\Omega_F)$ par (3.62). Les espaces des multiplicateurs de Lagrange $M(\Gamma)$ et $M(\gamma)$ sont donnés par :

$$M(\Gamma) = \{\nu \in W(\Gamma), \forall a = (m, n) \in \Gamma, \nu|_a \in \mathbb{P}^1(a)\}$$

$$M(\gamma) = \{\nu \in W(\gamma), \forall a = (m, n) \in \gamma, \nu|_a \in \mathbb{P}^1(a)\}$$

Précisément, ces espaces des multiplicateurs de Lagrange sont les espaces des traces $W(\Gamma)$ et $W(\gamma)$, notamment on a :

$$\dim(M(\Gamma)) = \dim(W(\Gamma)), \quad \text{et} \quad \dim(M(\gamma)) = \dim(W(\gamma))$$

Par ailleurs, on notera que les espaces sont indépendants de la variable temps, ils sont uniquement variables de l'espace. Il existe une variété d'espaces envisageables pour les multiplicateurs de Lagrange, néanmoins, on choisit ici des espaces simples qui correspondent aux espaces des traces.

Cas vectoriel

Pour le cas d'inconnues vectorielles, les opérateurs de couplage (3.82) induisent des couplages faibles entre domaine. Plus particulièrement, ces opérateurs sont des projections

orthogonales telles que :

$$\int_{\Gamma} ((\pi_F \mathbf{u} \cdot \tau_{\Gamma}) - (\mathbf{u} \cdot \tau_{\Gamma})) \nu = 0, \quad \mathbf{u} \in X(\Omega_M) \text{ et } \nu \in M(\Gamma) \quad (3.93)$$

$$\int_{\gamma} ((\pi_M \mathbf{u} \cdot \tau_{\gamma}) - (\mathbf{u} \cdot \tau_{\gamma})) \nu = 0, \quad \mathbf{u} \in X(\Omega_F) \text{ et } \nu \in M(\gamma) \quad (3.94)$$

avec $X(\Omega_M)$ et $X(\Omega_F)$ décrient par (3.75) et (3.74). Les espaces des multiplicateurs de Lagrange définis comme :

$$M(\Gamma) = \{\nu \in L^2(\Gamma), \nu_{H|a} \in \mathbb{P}^0(a) \forall a \in \Gamma\} \quad (3.95)$$

$$M(\gamma) = \{\nu \in L^2(\gamma), \nu_{h|a} \in \mathbb{P}^0(a) \forall a \in \gamma\} \quad (3.96)$$

On remarque que ces espaces sont exactement les espaces des traces tangentielles des fonctions de $X(\Omega_F)$ et $X(\Omega_M)$, tels que :

$$\dim(M(\Gamma)) = \dim(W(\Gamma)), \quad \text{et} \quad \dim(M(\gamma)) = \dim(W(\gamma))$$

Ces opérateurs définissent de nombreuses propriétés sur les espaces $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ [30, 35], on a, notamment, que :

$$\|\pi_F \mathbf{u}\|_{0,\Gamma} \leq C_F \|\mathbf{u}\|_{0,\Gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_M) \quad (3.97)$$

$$\|\pi_M \mathbf{u}\|_{0,\gamma} \leq C_M \|\mathbf{u}\|_{0,\gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in H(\mathbf{rot}, \Omega_F) \quad (3.98)$$

De par ces relations, les opérateurs assurent la stabilité en norme L^2 de la solution numérique obtenue par la méthode.

3.5.2 Estimation d'erreur

Soit le problème variationnel général suivant : trouver $u \in V$ tel que :

$$a(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V \quad (3.99)$$

A cette formulation est associée le problème discret : trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.100)$$

Les estimations d'erreurs, aussi bien pour des inconnues scalaires que vectorielles, reposent essentiellement sur le deuxième lemme de Berger-Scott-Strang, que l'on rappelle par la suite.

Lemme de Berger-Scott-Strang. *Soit la forme bilinéaire sur $a_h(.,.)$. On suppose qu'elle est continue, de constante $C > 0$, et elliptique, sur $V_h \times V_h$.*

Alors les solutions u du problème (3.99) et u_h de (3.100) vérifient l'estimation d'erreur, en norme $\|\cdot\|_$, suivante :*

$$\|u - u_h\|_* \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_* + \sup_{w_h \in V_h} \frac{a(u, w_h) - (f, w_h)_0}{\|w_h\|_*} \right) \quad (3.101)$$

L'erreur de consistance mesure le "crime" commis par la solution numérique sur la solution continue. Son estimation est le point critique de la théorie MEM car elle est décisive pour l'optimalité de la méthode. Par optimalité, on signifie que l'erreur de la solution globale est majorée par la somme des erreurs sur chaque sous-domaine.

Cas nodal

Dans le cas où les inconnues sont calculées aux nœuds des maillages, on trouve l'estimation de l'erreur globale entre u la solution du problème continu (3.21)-(3.22) et u_* la solution du problème discret (3.72)-(3.73) :

$$\|u - u_*\|_* \leq C \left(\inf_{v_* \in \mathcal{U}^*} \|u - v_*\|_* + \sup_{w_* \in \mathcal{U}^*} \frac{a_\Omega(u, w_*) - (J_0, w_*)_0}{\|w_*\|_*} \right) \quad (3.102)$$

avec $\mathcal{U}^* := \{u_* = (u_H, u_h) \in X_0(\Omega_F) \times X(\Omega_M) \text{ telle que } \int_\Gamma (\pi_F u - u) \nu = 0 \ \forall \nu \in M(\Gamma) \text{ et } \int_{\gamma \cap \mathcal{T}_h} (\pi_M \mathbf{u} - \mathbf{u}) \cdot \nu = \mathbf{0}, \ u \in X(\Omega_F) \ \forall \nu \in M(\gamma)\}$.

Le premier terme du membre de droite représente la meilleure erreur d'approximation tandis que le second désigne l'erreur de consistance. Afin d'obtenir une idée de l'ordre de convergence de la méthode, on cherche à majorer l'erreur de consistance précédemment présentée. On a la majoration suivante (article 1 dans [89]) :

$$\sup_{w_* \in \mathcal{U}^*} \frac{a_\Omega(u, w_*) - (J_0, w_*)_0}{\|w_*\|_*} \leq C\mathcal{H}\|u\|_{2,\Omega} \quad (3.103)$$

Pour les normes L^2 et H^* on trouve, avec $(C_i)_{i=1,2,3,4}$ des constantes indépendantes de h et H , les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,\Omega_M} &\leq C_1 h^2 \|u\|_{2,\Omega_M} & \|u - u_H\|_{0,\Omega_F} &\leq C_3 H^2 \|u\|_{2,\Omega_F} \\ \|u - u_h\|_{1,\Omega_M} &\leq C_2 h \|u\|_{2,\Omega_M} & \|u - u_H\|_{1,\Omega_F} &\leq C_4 H \|u\|_{2,\Omega_F} \end{aligned} \quad (3.104)$$

On récupère de l'ordre 2 en norme L^2 et 1 en semi-norme H^1 sur chaque domaine. La méthode étant optimale, on peut exprimer l'erreur commise en norme $X = \{L^2, H^1\}$ par la solution globale u_* comme :

$$\|u - u_*\|_{X,\Omega} = \|u - u_H\|_{X,\Omega_F} + \|u - u_h\|_{X,\Omega_M} \quad (3.105)$$

On injecte (3.104) dans (3.105) ce qui donne les majorations suivantes :

$$\|u - u_*\|_{0,\Omega} \leq \max(C_1, C_3) \mathcal{H}^2 \|u\|_{2,\Omega} \quad (3.106)$$

$$\|u - u_*\|_* \leq \max(C_2, C_4) \mathcal{H} \|u\|_{2,\Omega} \quad (3.107)$$

La méthode, ainsi décrite, maintient un ordre global de 2 en norme L^2 et 1 en norme H^1 .

Cas vectoriel

On regarde les estimations d'erreur ainsi que les ordres de convergence induits par la MEM avec recouvrement combinée à des éléments d'arête dans l'espace

$\mathcal{U}^* := \{\mathbf{u}_* = (\mathbf{u}_H, \mathbf{u}_h) \in X_0(\Omega_F) \times X(\Omega_M) \text{ telle que } \int_\Gamma (\pi_F \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h) \cdot \nu = 0 \ \forall \nu \in M(\Gamma) \text{ et } \int_\gamma (\pi_M \mathbf{u}_H - \mathbf{u}_H) \cdot \nu = 0 \ \forall \nu \in M(\gamma)\}$.

La solution \mathbf{u} du problème continu (3.52)-(3.53) et $\mathbf{u}_* \in \mathcal{U}^*$ du problème discret (3.85)-(3.86) vérifie, par le deuxième lemme de Berger-Scott-Strang, l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_*\|_* \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_* \in \mathcal{U}^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_*\|_* + \sup_{\mathbf{v}_* \in \mathcal{U}^*} \frac{(\mathbf{v}_H \cdot \boldsymbol{\tau}, \mathbf{rot} \ \mathbf{u})_{1/2,\Gamma} + (\mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}, \mathbf{rot} \ \mathbf{u})_{1/2,\gamma}}{\|\mathbf{v}_*\|_*} \right) \quad (3.108)$$

On analyse séparément l'erreur d'approximation (premier terme du membre de droite) et l'erreur de consistance (deuxième terme du membre de droite) [12, 89]. Cette étude donne une estimation finale de l'erreur commise par la méthode.

Soient $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ avec $\mathbf{u}_F \in (\mathbf{H}^2(\Omega_F))^2$, $\mathbf{u}_M \in (\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2$, $\mathbf{rot} \mathbf{u}_F \in \mathbf{H}^2(\Omega_F)$, $\mathbf{rot} \mathbf{u}_M \in \mathbf{H}^2(\Omega_M)$, on a la majoration de l'erreur d'approximation, avec C une constante strictement positive :

$$\inf_{\mathbf{v}_* \in \mathcal{U}^*} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_*\|_* \leq C H^2 \left(\|\mathbf{u}_F\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_F))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_F\|_{2, \Omega_F}^2 \right) + C h^2 \left(\|\mathbf{u}_M\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_M\|_{2, \Omega_M}^2 \right) \quad (3.109)$$

L'erreur de consistance est bornée telle que :

$$\sup_{\mathbf{v}_* \in \mathcal{U}^*} \frac{(\mathbf{v}_H \cdot \boldsymbol{\tau}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{1/2, \Gamma} + (\mathbf{v}_h \cdot \boldsymbol{\tau}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{1/2, \gamma}}{\|\mathbf{v}_*\|_*} \leq C H^2 \left(\|\mathbf{u}_F\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_F))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_F\|_{2, \Omega_F}^2 \right) + C h^2 \left(\|\mathbf{u}_M\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_M\|_{2, \Omega_M}^2 + \|\mathbf{J}_0\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2}^2 \right) \quad (3.110)$$

où la constante C est indépendante du pas d'espace.

En combinant (3.109) et (3.110), on a l'erreur finale sur l'ensemble du domaine qui s'exprime comme :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_*\|_* \leq C H^2 \left(\|\mathbf{u}_F\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_F))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_F\|_{2, \Omega_F}^2 \right) + C h^2 \left(\|\mathbf{u}_M\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_M\|_{2, \Omega_M}^2 + \|\mathbf{J}_0\|_{(\mathbf{H}^2(\Omega_M))^2}^2 \right) \quad (3.111)$$

Cette estimation indique, notamment, que l'erreur commise est d'ordre 2 en normes L^2 et $\mathbf{H}(\mathbf{rot})$.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté le cadre théorique lié à la méthode de décomposition de domaine mise en œuvre dans ce travail de thèse, aussi bien pour des inconnues scalaires que vectorielles. Cette technique propose notamment d'étendre la théorie de la MEM à des maillages recouverts, indépendants et non-conformes. De plus, un échange d'information réciproque entre les sous-domaines a été imposé. Pour ce faire, nous sommes partis des travaux [52, 90, 91] qui proposent une version de la MEM avec recouvrement pour un échange du domaine fixe vers le domaine mobile via la frontière discrétisée de ce dernier. La méthode d'échange inverse a, par la suite, été présentée : choix de l'interface de couplage, définition et caractérisation de l'opérateur de projection. La dernière partie de ce chapitre a, notamment, permis de donner une estimation des erreurs a priori induite par la méthode développée. D'une part, l'erreur commise est optimale, d'autre part, la méthode

3.6 Conclusion

maintient de l'ordre 2 en norme L^2 et 1 en ordre H^1 dans le cas d'une résolution scalaire et de l'ordre 2 en norme L^2 et $H(\mathbf{rot})$ pour des inconnues vectorielles. Aussi, le chapitre qui suit présente-t-il la mise en œuvre de la méthode de décomposition de domaine en 2D ainsi que l'étude du comportement numérique des solutions qui en sont issues.

Chapitre 4

Mise en oeuvre et validations numériques

Dans un premier temps, ce chapitre présente les techniques numériques de couplage menant aux formulations matricielles des conditions de couplage dans le cas bidimensionnel. La construction du système algébrique final sera formulée pour une résolution simultanée des sous-domaines. Il s'agira, dans un second temps, et pour chacune des stratégies retenues, de mettre en évidence la précision numérique de la méthode. Pour cela, on s'appuiera essentiellement sur des expériences numériques dans le cadre de cas test pour lesquels une solution exacte est connue (les exemples présentés au Chapitre 1). Ceci permet de mesurer des erreurs et ainsi de vérifier la préservation de l'ordre de convergence en maillage malgré la décomposition de domaine.

4.1 Construction des matrices de couplage

4.1.1 Cas scalaire

Mise sous forme matricielle

Les transferts d'information entre domaines sont considérés réciproques. Ces couplages sont posés de manière faible au sein des formulations. Ce paragraphe décrit les matrices de couplage qui en découlent. Pour commencer, on rappelle la condition de transmission faible de Ω_F vers Ω_M :

$$\int_{\gamma} \pi_M u_H \nu = \int_{\gamma} u_H \nu, \quad u_H \in X(\Omega_F) \text{ et } \nu \in M(\gamma) \quad (4.1)$$

Les contributions $\pi_M u_H$ et u_H sont décomposées, respectivement, sur les bases nodales (ψ_i) de \mathcal{T}_h et (ϕ_k) de \mathcal{T}_H de telle manière que :

$$\pi_M u_H(x, y) = \sum_{i \in \mathcal{T}_h \cap \gamma} u_i^h \psi_i(x, y) \quad (4.2)$$

$$u_H(x, y) = \sum_{k \in \mathcal{T}_H} u_k^H \phi_k(x, y) \quad (4.3)$$

avec u_i^h le i -ème degré de liberté de $\mathcal{T}_h \cap \gamma$ et u_k^H le k -ème degré de liberté de \mathcal{T}_H . En injectant (4.2)-(4.3) dans (4.1) et en prenant comme fonction lagrangienne ψ_j , on obtient :

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_h \cap \gamma} u_i^h \int_{\gamma} \psi_i(x, y) \psi_j(x, y) = \sum_{k \in \mathcal{T}_H} u_k^H \int_{\gamma} \phi_k(x, y) \psi_j(x, y) \quad (4.4)$$

Finalement, il vient la forme matricielle de (4.1) qui s'écrit :

$$C \mathbf{U}_{h|\gamma} = D \mathbf{U}_H \quad (4.5)$$

avec le vecteur $\mathbf{U}_{h|\gamma}$ des degrés de liberté sur γ , \mathbf{U}_H celui des degrés de liberté de \mathcal{T}_H et les matrices C et D qui sont données par :

$$C(j, i) = \int_{a \in \gamma} \psi_i \psi_j, \quad j, i \in \mathcal{T}_h, \quad (4.6)$$

$$D(j, k) = \int_{a \in \gamma} \phi_k \psi_j, \quad j \in \mathcal{T}_h, k \in \mathcal{T}_H \quad (4.7)$$

où a représente une arête de γ .

Désormais, on regarde le transfert d'information de Ω_M vers Ω_F imposé par la relation :

$$\int_{\Gamma} \pi_F u_h \nu = \int_{\Gamma} u_h \nu, \quad u_h \in X(\Omega_M) \text{ et } \nu \in M(\Gamma) \quad (4.8)$$

Les expressions de $\pi_F u_h$ et u_h sur les bases respectives de \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h , (ϕ_i) et (ψ_k) , sont :

$$\pi_F u_h(x, y) = \sum_{i \in \mathcal{T}_H \cap \Gamma} u_i^H \phi_i(x, y) \quad (4.9)$$

$$u_h(x, y) = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} u_k^h \psi_k(x, y) \quad (4.10)$$

En mettant (4.9)-(4.10) dans (4.8) et en choisissant comme fonction lagrangienne ϕ_j , on trouve la relation suivante :

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_H \cap \Gamma} u_i^H \int_{\Gamma} \phi_i(x, y) \phi_j(x, y) = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} u_k^h \int_{\Gamma} \psi_k(x, y) \phi_j(x, y) \quad (4.11)$$

De cette égalité, on en déduit la forme matricielle de (4.8) :

$$E \mathbf{U}_{H|\Gamma} = H \mathbf{U}_h \quad (4.12)$$

où $\mathbf{U}_{H|\Gamma}$ est le vecteur des degrés de liberté sur Γ , \mathbf{U}_h celui sur \mathcal{T}_h et les matrices E et H qui s'écrivent comme :

$$E(j, i) = \int_{a \in \Gamma} \phi_j \phi_i, \quad j, i \in \mathcal{T}_H, \quad (4.13)$$

$$H(j, k) = \int_{a \in \Gamma} \psi_k \phi_j, \quad j \in \mathcal{T}_H, k \in \mathcal{T}_h \quad (4.14)$$

avec a une arête de Γ .

Calcul des matrices de couplage

La matrice C est définie à partir de fonctions de forme qui vivent sur la même triangulation \mathcal{T}_h , la matrice E quant à elle est déterminée à partir de fonctions de bases qui vivent sur \mathcal{T}_H . Il n'y a, donc, pas de difficultés quant à l'évaluation des termes de ces deux matrices. Les calculs se compliquent, néanmoins, pour les matrices D et H . En effet, chacune de ces matrices est déterminée à partir de fonctions de forme qui ne vivent pas sur la même discrétisation. Il est donc, à priori, délicat de déterminer une intersection entre les supports de ϕ_j et ψ_k . Afin de résoudre ce problème, on choisit de mettre en œuvre une formule de quadrature. La motivation principale de ce choix est de pouvoir ramener le calcul d'une intégrale entre des fonctions à supports disjoints, à un produit de fonctions qui sont évaluées en un nombre fini de points de quadrature.

On cherche à estimer les intégrales de la forme (4.7) et (4.14) en deux dimensions. Pour ce faire, la formule de quadrature de Gauss [43] est retenue. Les formules obtenues sont de la forme :

$$D(j, k) = \sum_{a \in \gamma} \left(\frac{|a|}{2} \sum_{r=1}^G p_r \phi_k(\zeta_r) \psi_j(\zeta_r) \right) \quad (4.15)$$

$$H(j, k) = \sum_{a \in \Gamma} \left(\frac{|a|}{2} \sum_{r=1}^G p_r \psi_k(\zeta_r) \phi_j(\zeta_r) \right) \quad (4.16)$$

avec G le nombre de points d'intégration, ζ_r le r -ème point de quadrature, p_r le poids qui lui est associé et $|a|$ la longueur de l'arête a sur laquelle s'effectue l'intégration. Les points de quadrature sont localisés dans chaque maillage, ainsi les valeurs, des fonctions, sont facilement identifiables.

La figure 4.1 montre un exemple de calcul pour la contribution d'une arête $a = (n_1, n_2)$ dans (4.15). Pour $G = 3$, les points $(\zeta_r)_{r=1,2,3} \in a$ donc ψ_1 et ψ_2 sont directement connues. Comme $\zeta_1 \in T_1 \subset \mathcal{T}_H$, on a les 3 contributions $\phi_{N_1}(\zeta_1)$, $\phi_{N_2}(\zeta_1)$ et $\phi_{N_3}(\zeta_1)$ qui s'ajoutent dans D . Comme $\zeta_2 \in T_2 \subset \mathcal{T}_H$ et $\zeta_3 \in T_3 \subset \mathcal{T}_H$, c'est au total 9 contributions qui interviennent dans le calcul de D .

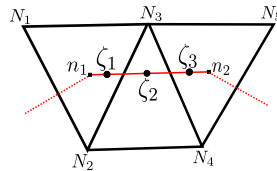


FIGURE 4.1 – Calcul de la contribution de l'arête $a = (n_1, n_2)$ dans (4.15)

Les matrices C et E sont carrés, creuses et symétriques définies positives. Les matrices D et H sont rectangulaires et creuses. La figure 4.2 donne des exemples de formats que peuvent prendre les matrices C et D pour 15 degrés de liberté sur γ .

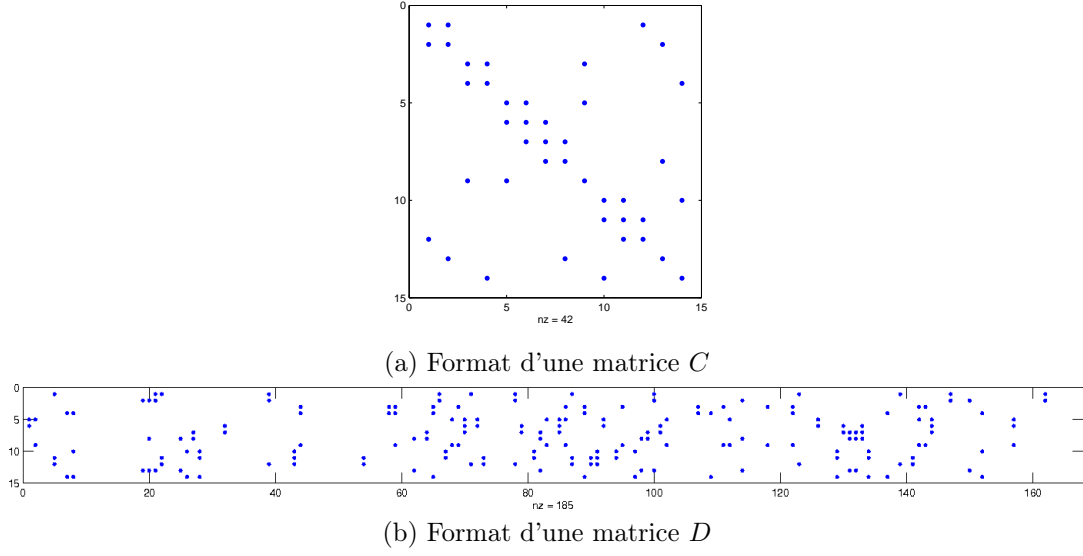


FIGURE 4.2 – Formes des matrices de couplage (cas scalaire)

4.1.2 Cas vectoriel

Mise sous forme matricielle

Dans cette partie, on donne la forme matricielle des relations de couplages (3.93) et (3.94). On débute par la relation permettant l'échange d'information de Ω_F vers Ω_M , que l'on rappelle ici :

$$\int_{\gamma} (\pi_M \mathbf{u}_H \cdot \tau_{\gamma}) \nu = \int_{\gamma} (\mathbf{u}_H \cdot \tau_{\gamma}) \nu, \quad \mathbf{u}_H \in X(\Omega_F) \text{ et } \nu \in M(\gamma) \quad (4.17)$$

Les champs inconnus $\pi_M \mathbf{u}_H$ et \mathbf{u}_H admettent les décompositions sur les bases, respectives, (\mathbf{w}_i^h) de \mathcal{T}_h et (\mathbf{w}_j^H) de \mathcal{T}_H suivantes :

$$\pi_M \mathbf{u}_H(x, y) = \sum_{i \in \mathcal{T}_h \cap \gamma} u_i^h \mathbf{w}_i^h \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u}_H(x, y) = \sum_{j \in \mathcal{T}_H} u_j^H \mathbf{w}_j^H \quad (4.19)$$

où u_i^h et u_j^H sont les degrés de liberté, respectifs, sur $\mathcal{T}_h \cap \gamma$ et \mathcal{T}_H . En remplaçant $\pi_M \mathbf{u}_H$ et \mathbf{u}_H par (4.18) et (4.19) dans (4.17) et en prenant $(\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_{\gamma})$ pour fonction lagrangienne, on trouve :

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_h \cap \gamma} u_i^h \int_{\gamma} (\mathbf{w}_i^h \cdot \tau_{\gamma}) (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_{\gamma}) = \sum_{j \in \mathcal{T}_H} u_j^H \int_{\gamma} (\mathbf{w}_j^H \cdot \tau_{\gamma}) (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_{\gamma}) \quad (4.20)$$

Il vient la forme matricielle de (4.17) qui s'écrit :

$$C \mathbf{U}_{h|\gamma} = D \mathbf{U}_H \quad (4.21)$$

avec

$$C(a, i) = \int_{\gamma} (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_{\gamma})(\mathbf{w}_i^h \cdot \tau_{\gamma}), \quad a, i \in \mathcal{T}_h, \quad (4.22)$$

$$D(a, j) = \int_{\gamma} (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_{\gamma})(\mathbf{w}_j^H \cdot \tau_{\gamma}), \quad a \in \mathcal{T}_h, j \in \mathcal{T}_H, \quad (4.23)$$

On regarde, désormais, la relation effectuant le transfert d'information de Ω_M vers Ω_F , qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma} (\pi_F \mathbf{u}_h \cdot \tau_{\Gamma}) \nu = \int_{\Gamma} (\mathbf{u}_h \cdot \tau_{\Gamma}) \nu, \quad \mathbf{u}_h \in X(\Omega_M) \text{ et } \nu \in M(\Gamma) \quad (4.24)$$

Les décompositions des champs inconnus $\pi_F \mathbf{u}_h$ et \mathbf{u}_h dans \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h sont données par :

$$\pi_F \mathbf{u}_h(x, y) = \sum_{i \in \mathcal{T}_H \cap \Gamma} u_i^H \mathbf{w}_i^H \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}_h(x, y) = \sum_{j \in \mathcal{T}_h} u_j^h \mathbf{w}_j^h \quad (4.26)$$

avec u_i^H les circulations sur les arêtes de $\mathcal{T}_H \cap \Gamma$ et u_j^h sur celles de \mathcal{T}_h . En injectant (4.25)-(4.26) dans (4.24) et en choisissant $(\mathbf{w}_a^H \cdot \tau_{\Gamma})$ comme fonction lagrangienne, on a :

$$\sum_{i \in \mathcal{T}_H \cap \Gamma} u_i^H \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_i^H \cdot \tau_{\Gamma})(\mathbf{w}_a^H \cdot \tau_{\Gamma}) = \sum_{j \in \mathcal{T}_h} u_j^h \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_j^h \cdot \tau_{\Gamma})(\mathbf{w}_a^H \cdot \tau_{\Gamma}) \quad (4.27)$$

Finalement, la forme matricielle de (4.24) s'écrit :

$$E \mathbf{U}_{H|\Gamma} = H \mathbf{U}_h \quad (4.28)$$

où

$$E(a, i) = \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a^H \cdot \tau_{\Gamma})(\mathbf{w}_i^H \cdot \tau_{\Gamma}), \quad a, i \in \mathcal{T}_H, \quad (4.29)$$

$$H(a, j) = \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a^H \cdot \tau_{\Gamma})(\mathbf{w}_j^h \cdot \tau_{\Gamma}), \quad a \in \mathcal{T}_H, j \in \mathcal{T}_h, \quad (4.30)$$

Calcul des matrices de couplage

La matrice C est déterminée par des fonctions de Whitney d'ordre 1 définies sur \mathcal{T}_h . Un constat similaire est fait pour la matrice E qui se calcule avec des fonctions de Whitney d'ordre 1 vivant sur \mathcal{T}_H . On a, dans ce cas, les formules suivantes :

$$C(a, i) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} & \text{pour } i = a, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i, a \in \mathcal{T}_h \quad (4.31)$$

$$E(a, i) = \begin{cases} \frac{1}{|a|} & \text{pour } i = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad i, a \in \mathcal{T}_H \quad (4.32)$$

Les matrices C et E sont, dans ce cas, diagonales définies positives. Les matrices D et H sont évaluées par un produit de fonctions de Whitney d'ordre 1 qui vivent dans des maillages différents. Ce produit est délicat à évaluer, dans le sens où l'intersection des supports des fonctions n'est pas aisée à déterminer. De ce fait, on choisit de définir les matrices D et H par des formules que l'on présente par la suite. On discrétise la formule (4.23) sur les arêtes qui forment $\gamma \cap \mathcal{T}_h$, ce qui donne :

$$D(a, j) = \sum_{a \in \gamma \cap \mathcal{T}_h} \int_a (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_a) (\mathbf{w}_j^H \cdot \tau_a) \quad (4.33)$$

Comme les arêtes a de γ sont recouvertes par des éléments de \mathcal{T}_H , il est possible de fractionner a en fonction des mailles qui la recouvrent (Fig.4.3a). On obtient alors :

$$D(a, j) = \sum_{a \in \gamma \cap \mathcal{T}_h} \sum_{b_i \in a} \int_{b_i} (\mathbf{w}_a^h \cdot \tau_a) (\mathbf{w}_j^H \cdot \tau_a) = \sum_{a \in \gamma \cap \mathcal{T}_h} \sum_{b_i \in a} \frac{1}{|a|} \int_{b_i} (\mathbf{w}_j^H \cdot \tau_a) \quad (4.34)$$

avec b_i les segments constituant a tels que :

$$\bigcup b_i = a, \quad \text{et} \quad \bigcap b_i = \{\emptyset, \text{un point}\} \quad (4.35)$$

Finalement, on applique une formule du point milieu à (4.34) :

$$D(a, j) = \sum_{a \in \gamma \cap \mathcal{T}_h} \sum_{b_i \in a} \frac{|b_i|}{|a|} (\mathbf{w}_j^H(X_{b_i}) \cdot \tau_a) \quad (4.36)$$

avec X_{b_i} le point milieu de b_i (Fig.4.3b).

En appliquant le même raisonnement, on trouve la formule pour le calcul de (4.30) qui s'écrit :

$$H(a, j) = \sum_{a \in \Gamma \cap \mathcal{T}_H} \sum_{b_i \in a} \frac{|b_i|}{|a|} (\mathbf{w}_j^h(X_{b_i}) \cdot \tau_a) \quad (4.37)$$

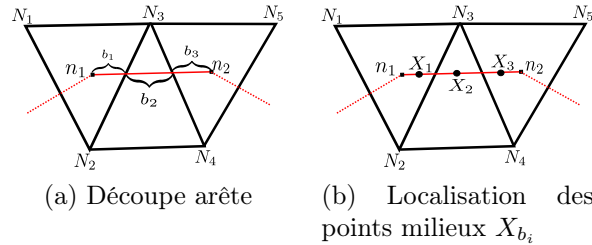


FIGURE 4.3 – Calcul des matrices D et H

4.2 Système matriciel global

Dans ce paragraphe est détaillé la mise en forme du système matriciel final. La démarche ainsi que la forme finale du système se trouvent être les mêmes pour des inconnues

scalaires et vectorielles.

L'approche retenue lors de ces travaux de thèse est une résolution simultanée des équations dans chaque sous-domaine. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître l'ensemble des matrices intervenant dans la résolution du problème global : les matrices de masse et rigidité introduites par la MEF ainsi que les matrices de couplages relatives à la MEM (examinées précédemment).

Soit \mathbb{M}_F la matrice de la MEF associée à la résolution sur le domaine Ω_F . Il est à distinguer deux ensembles triés de degrés de liberté dans \mathcal{T}_h : l'ensemble des degrés de liberté internes au maillage $\mathcal{T}_h \setminus \gamma$, notés I, et ceux de bord notés γ . Dans ce cas, le système linéaire obtenue par la MEF sur Ω_M s'écrit tel que :

$$\mathbb{M}_M \mathbf{U}_h = \mathbb{F}_h \quad (4.38)$$

avec

$$\mathbb{M}_M = \begin{pmatrix} M_{II} & M_{I\gamma} \\ M_{\gamma I} & M_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_h = (\mathbf{U}_{h|I}, \mathbf{U}_{h|\gamma})' \quad \text{et} \quad \mathbb{F}_h = (\mathbb{F}_{h|I}, \mathbb{F}_{h|\gamma})'$$

La méthode de pénalisation par multiplicateurs de Lagrange [38, 42, 87] est retenue en vue d'imposer les conditions de couplage dans le système global. Des vecteurs de multiplicateurs de Lagrange λ_γ et λ_Γ sont introduits afin d'imposer, respectivement, (4.5) et (4.12). On a pu constater que cette méthode pénalise la résolution du système en introduisant des contributions non nécessaires qui dégradent la qualité de la solution globale finale (voir Annexe B). Nous avons choisi d'appliquer une condensation de Guyan [19, 61] afin de lever ces restrictions. Cette technique permet de considérer les degrés de liberté situés sur γ comme "maître" dans le calcul de (4.12). Cela signifie que l'on détermine \mathbf{U}_H uniquement en fonction de $\mathbf{U}_{h|\gamma}$, ce qui donne :

$$E \mathbf{U}_H + (H_I M_{II}^{-1} M_{I\gamma} - H_\gamma) \mathbf{U}_{h|\gamma} = H_I M_{II}^{-1} \mathbb{F}_{h|I} \quad (4.39)$$

où $H \mathbf{U}_h = H_I \mathbf{U}_{h|I} + H_\gamma \mathbf{U}_{h|\gamma}$.

Le système matriciel final, déterminé par les conditions et techniques retenues, prend alors la forme :

$$\mathbb{M} \mathbf{U} = \mathbb{F} \quad (4.40)$$

où \mathbb{M} est la matrice globale, \mathbf{U} le vecteur des inconnues et \mathbb{F} le second membre qui s'expriment comme :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_F & 0 & 0 & -D^T & E^T \\ 0 & M_{II} & M_{I\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\gamma I} & M_{\gamma\gamma} & C^T & (H_I M_{II}^{-1} M_{I\gamma} - H_\gamma)^T \\ -D & 0 & C & 0 & 0 \\ E & 0 & H_I M_{II}^{-1} M_{I\gamma} - H_\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_H, \mathbf{U}_{h|I}, \mathbf{U}_{h|\gamma}, \lambda_\gamma, \lambda_\Gamma)'$$

$$\mathbb{F} = (0, \mathbb{F}_{h|I}, \mathbb{F}_{h|\gamma}, 0, H_I M_{II}^{-1} \mathbb{F}_{h|I})'.$$

La matrice \mathbb{M} est carrée, creuse, symétrique et définie positive. Les méthodes de résolution itératives classiques (Gradient Conjugué, GMRES) peuvent être choisies lors de la résolution du système. Dans les tests qui suivent, on utilise une méthode directe lors de la résolution. Bien que moins précise elle a pour avantage d'être plus rapide que les méthodes itératives pour une taille raisonnable du système.

Remarque 4.1. *Le tri des degrés de liberté de \mathcal{T}_h est invariant en présence de mouvement. De ce fait, uniquement la matrice D de (4.5) est à recalculer à chaque nouvelle position de Ω_M . La forme générale du système matriciel reste donc la même. Néanmoins, pour (4.12) comme Γ est modifiée pour chaque nouvelle configuration, E et H sont à réévaluer à chaque déplacement. Au final, à chaque déplacement du domaine mobile est associé le coût de recalcul des matrices de taille réduite D , E et H .*

4.3 Validations numériques

Lors de la mise en œuvre de techniques de décomposition de domaine, il est important de vérifier numériquement que la méthode conserve l'ordre de convergence en maillage de la MEF. Afin d'y parvenir, on se place à nouveau dans le cadre des cas tests présentés au Chapitre 1. Ce cadre est bien adapté à l'étude de la précision de la méthode de décomposition de domaine puisqu'il a déjà permis de valider la précision numérique propre à chaque cas sans décomposition de domaine. Ceci fournit naturellement une base de comparaison utile. Dans ce qui suit, la précision de la méthode est examinée pour des inconnues de type scalaires et vectorielles.

4.3.1 Cas scalaire

On se propose de reprendre le cas test examiné dans (1.2.3). Une décomposition de domaine est choisie telle que : Ω_F est un domaine carré de dimensions $[0, 1] \times [0, 1]$ et Ω_M un disque de centre $(0.5, 0.5)$ et de rayon $R = 0.3\text{m}$. Chaque domaine possède sa propre triangulation \mathcal{T}_H pour Ω_F et \mathcal{T}_h pour Ω_M . Ces maillages sont non-conformes, indépendants et \mathcal{T}_h est entièrement recouvert par \mathcal{T}_H . La figure 4.4 représente la géométrie retenue pour une configuration de maillage $H = 1/12$ et $h = 1/48$.

Une solution numérique du champ magnétique et de sa norme est donnée par la figure 4.5. La solution paraît qualitativement acceptable par rapport à la solution de référence. En effet, la distribution du champ dans le domaine global est cohérente avec la solution de référence.

On regarde désormais la solution de manière quantitative. Le tableau 4.1 présente les erreurs et ordre de convergence en maillage mesurés au cours de raffinements conjoints et successifs des maillages \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h . Les erreurs propres à chaque sous-domaine Ω_F et Ω_M sont exprimées en norme L^2 et H^1 , on y trouve également une mesure de l'erreur commise par la solution globale (i.e. $u = (u_H|_{\Omega_F \setminus \Omega_M}, u_h)$) sur Ω . On note que les discrétisations sont choisies de façon à obtenir une densité de degrés de liberté de rapport $H = 2h$. Ces résultats montrent que la méthode préserve l'ordre de convergence en maillage sur le domaine global mais également sur chaque sous-domaine. Conformément aux résultats

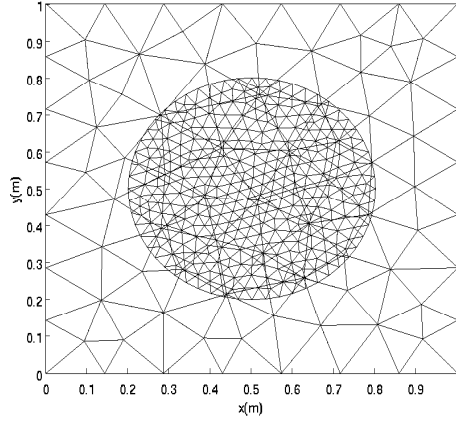


FIGURE 4.4 – Maillages de Ω_F et Ω_M en vue des évaluations d'erreur pour le cas test nodal

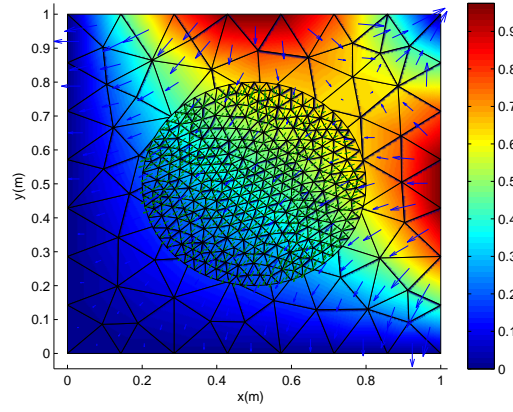


FIGURE 4.5 – Distribution du champ magnétique (vecteur et norme) pour $H = 1/12$ et $h = 1/48$

théoriques (3.106)-(3.107), on trouve que la convergence est, globalement, d'ordre 2 en norme L^2 et d'ordre 1 en norme H^1 .

La figure 4.6 présente les courbes de convergence de l'erreur sur Ω_F (Fig.A.3a), sur Ω_M (Fig.A.3b) et sur le domaine global Ω (Fig.A.3c). Les courbes montrent que les ordres de convergence en norme L^2 et H^1 sont maintenus avec le raffinement des maillages.

En conclusion, la méthode de décomposition de domaine mise en œuvre ne dégrade pas la précision de la MEF aussi bien qualitativement que quantitativement.

4.3.2 Cas vectoriel

Dans cette partie, on s'appuie sur le cas test (1.2.3) qui combine la MEF à des éléments de Whitney d'ordre 1. Le domaine Ω est décomposé entre Ω_F un disque de centre (0,0) et de rayon $R = 1\text{m}$ et Ω_M un quadrilatère de dimensions $[-0.6, 0.6] \times [-0.3, 0.3]$ centré en (0,0). Chaque domaine est discrétisé (\mathcal{T}_H pour Ω_F et \mathcal{T}_h pour Ω_M) de telle sorte que les

H	Erreurs et ordre L^2						Erreurs et ordre H^1						h
	Ω_F		Ω_M		Ω		Ω_F		Ω_M		Ω		
1/6	3,56E-02	-	2,56E-02	-	4,38E-02	-	2,55E-01	-	1,37E-01	-	2,89E-01	-	1/12
1/12	5,40E-03	2,7	3,70E-03	2,8	6,50E-03	2,8	4,93E-02	2,4	3,90E-02	1,8	6,29E-02	2,2	1/24
1/24	9,15E-04	2,6	5,56E-04	2,7	1,10E-03	2,6	2,14E-02	1,2	1,43E-02	1,4	2,58E-02	1,3	1/48
1/48	5,31E-04	0,8	3,48E-04	0,7	6,35E-04	0,8	1,09E-02	1,0	6,50E-03	1,1	1,27E-02	1,0	1/96
1/96	3,37E-04	0,7	2,43E-14	0,5	4,16E-04	0,6	6,00E-13	0,9	3,40E-03	0,9	6,90E-03	0,9	1/192

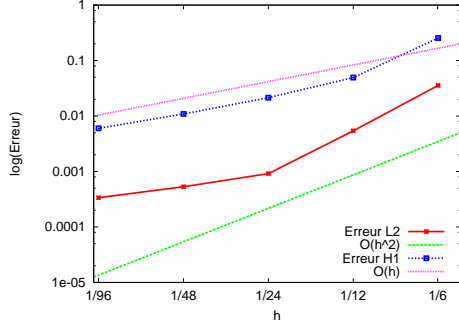
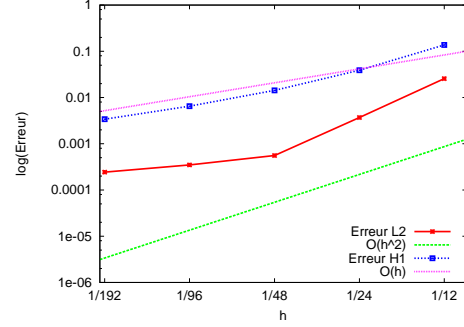
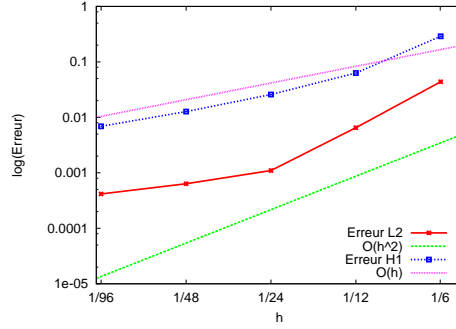
 TABLE 4.1 – Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 cas test nodal

 (a) Convergence en maillage Ω_F

 (b) Convergence en maillage Ω_M

 (c) Convergence en maillage Ω

FIGURE 4.6 – Courbes de convergence en maillage (cas scalaire)

maillages soient recouverts, non-conformes et indépendants. La configuration géométrique retenue est présentée avec la figure 4.7.

La solution numérique obtenue, pour la configuration géométrique et numérique, avec $H = 1/6$ et $h = 1/24$ est représentée dans la figure 4.8. A première vue, le comportement de la solution semble qualitativement correct : comportement du champ magnétique et norme du champ en accord avec la solution de référence.

On se doit, désormais, d'examiner la solution numérique de manière quantitative. Pour ce faire, le tableau 4.2 donne les erreurs et ordres de convergence en norme L^2 et semi-norme $H(\mathbf{rot})$ au cours de raffinements successifs et conjoints de \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h . Les erreurs et ordres de convergence sont mesurés pour les solutions locales à chaque sous-domaine mais également pour la solution reconstruite globale $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_H|_{\Omega_F \setminus \Omega_M}, \mathbf{u}_h)$ sur Ω . Les discrétisations sont choisies de manière à obtenir un rapport de $H = 2h$ entre \mathcal{T}_H et \mathcal{T}_h . D'après ces résultats, l'ordre de convergence en maillage est conservé avec le raffinement du maillage. L'ordre de convergence est 2 en norme L^2 et $H(\mathbf{rot})$, ce qui rejoint les résultats théoriques (3.111). Les courbes de convergence des erreurs sur Ω_F , Ω_M et Ω sont données par la figure 4.9.

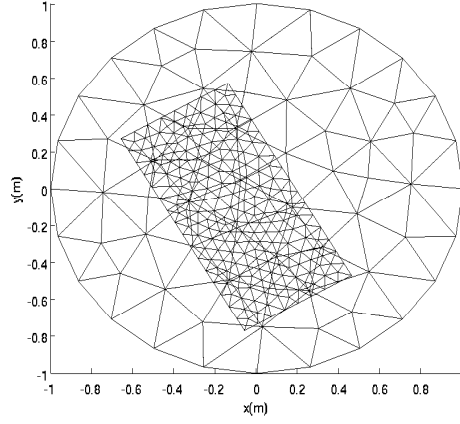


FIGURE 4.7 – Configuration en maillages de Ω_F et Ω_M en vue des évaluations d'erreur pour le cas test d'arête

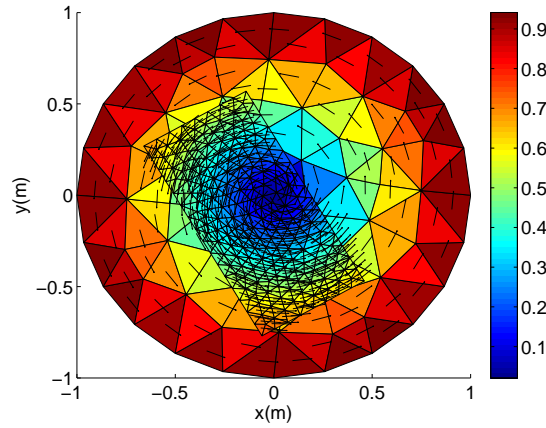


FIGURE 4.8 – Représentation de la norme du champ et du champ magnétique pour $H = 1/6$ et $h = 1/24$

Ces dernières confirment que l'ordre 2 en norme L^2 et semi-norme $H(\text{rot})$ est maintenu avec le raffinement des maillages.

A la lumière des ces résultats, la méthode de décomposition de domaine développée dans ce travail, combinée à des éléments de Whitney d'ordre 1, maintient la précision de la MEF.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a consisté, en premier lieu, à élaborer les procédures menant à la formulation matricielle des conditions de couplage introduites dans le chapitre précédent, dans un cas bidimensionnel et pour des inconnues scalaires et vectorielles. La méthode proposée dans le cadre de ce travail consiste essentiellement à prendre en compte des contributions entre sous-domaines par l'intermédiaire d'un couplage faible (projection L^2). La non-

H	Erreurs et ordre L^2						Erreurs et ordre $H(\mathbf{rot})$						h
	Ω_F		Ω_M		Ω		Ω_F		Ω_M		Ω		
1/6	1,05E-02	-	3,00E-03	-	1,10E-02	-	2,85E-02	-	1,46E-02	-	3,20E-02	-	1/12
1/12	2,60E-03	2,0	7,51E-04	2,0	2,70E-03	2,0	7,00E-03	2,0	3,60E-03	2,0	7,90E-03	2,0	1/24
1/24	7,73E-04	1,7	2,23E-04	1,6	8,05E-04	1,7	2,00E-03	1,8	1,10E-03	1,7	2,30E-03	1,8	1/48
1/48	2,12E-04	1,9	6,12E-05	1,9	2,20E-04	1,9	5,50E-04	1,9	2,97E-04	1,9	6,25E-04	1,9	1/96
1/96	5,54E-05	1,9	1,61E-05	1,9	5,77E-05	1,9	1,44E-04	1,9	7,79E-05	1,9	1,64E-04	1,9	1/192

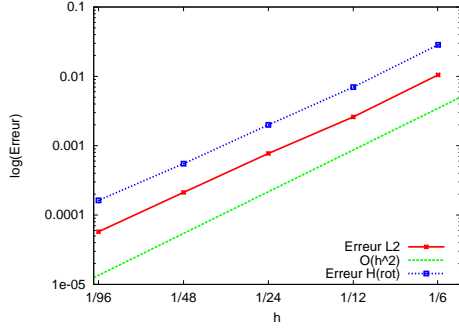
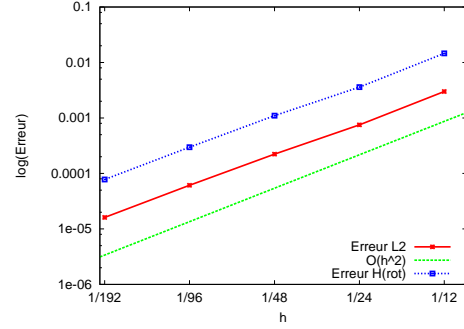
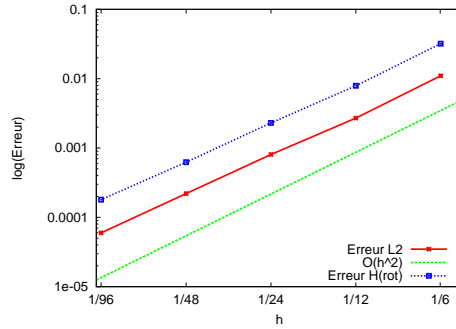
 TABLE 4.2 – Erreurs et ordres en normes L^2 et $H(\mathbf{rot})$ cas test d'arête

 (a) Convergence en maillage Ω_F

 (b) Convergence en maillage Ω_M

 (c) Convergence en maillage Ω

FIGURE 4.9 – Courbes de convergence en maillage (cas vectoriel)

conformité des discrétisations entraîne l'utilisation de techniques de recherche de points en maillage permettant de faire le lien entre les degrés de libertés : formule à points de Gauss en scalaire et découpe combinée à une formule du point milieu en vectoriel. Celles-ci ont menées à la formulation du système algébrique final. La stratégie d'une résolution simultanée entre les domaines a été retenue. Pour ce faire, une méthode de pénalisation par multiplicateurs de Lagrange a été combinée à une condensation de type Guyan.

Deuxièmement, ce chapitre a présenté une étude numérique de la précision de la méthode. Ceci a permis de montrer qu'il était possible de construire un couplage préservant, d'une part, l'ordre de convergence local à chaque sous-domaine et, d'autre part, l'ordre de convergence de la solution sur le domaine global.

Le chapitre qui suit présente l'extension de la méthode à des applications de contrôle par courants de Foucault qui, en plus de confirmer la précision de la technique, mettent en évidence l'intérêt d'une telle stratégie de décomposition.

Chapitre 5

Application à la modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault

Dans le but de mettre en évidence l'intérêt pratique de l'approche développée dans les parties précédentes, ce chapitre présente une application de la MEM avec recouvrement à des cas bidimensionnels représentatifs de contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault (CF). Plus particulièrement, on propose une étude complète des champs, ainsi que de la variation des grandeurs globales intervenant au cours de la modélisation du CND par CF. On commencera, cependant, par une présentation de la modélisation du CND par CF et un rappel des motivations menant à l'utilisation de la MEM avec recouvrement.

5.1 Le CND par CF

5.1.1 Objectifs du CND

Dans un contexte industriel de plus en plus exigeant quant aux normes de sûreté de fonctionnement des systèmes critiques, le contrôle non destructif (CND) est devenu, depuis la fin du XIXe siècle, un axe majeur de développement. En effet, le CND a pour vocation de vérifier l'intégrité d'une pièce ou d'un matériau sans l'endommager en y détectant d'éventuels défauts présents. La nature du contrôle dépend de la pièce à inspecter (nature du matériau, forme, ...), du type de vérification à effectuer (détection d'anomalies internes ou de surface, mesure d'épaisseur, ...) et des conditions dans lesquelles le contrôle doit être réalisé. Fort de ce constat, diverses méthodes ont ainsi été développées : radiographie, ultrasons, ressuage, thermographie, magnétoscopie et courants de Foucault (CF). Ces méthodes exploitent des phénomènes physiques différents et sont souvent complémentaires. Pour la plupart de ces techniques, les moyens d'acquisition ont été automatisés permettant le stockage et le traitement numérique d'un grand nombre de données. Pour plus d'informations sur le CND, le lecteur est invité à consulter les ouvrages [3, 27, 48, 55, 72]. Ces travaux se concentrent sur le CND par CF dont on rappelle les principales caractéristiques.

5.1.2 CND par CF

Le CND par CF (encore appelé CND par courants induits) est une technique faisant intervenir une bobine parcourue par un courant alternatif placée au voisinage d'une pièce conductrice à examiner (Fig. 5.1a). La bobine crée un champ émetteur variable au cours du temps. Des courants électriques se développent dans l'objet conducteur par la variation au cours du temps du champ magnétique dans lequel est plongé l'objet. C'est précisément ces courants électriques que l'on appelle courants de Foucault. Ils ont la même fréquence que le courant émetteur et génèrent un champ magnétique induit qui s'oppose au champ émetteur. La présence d'un défaut dans la partie conductrice déviara la circulation des CF et ainsi modifiera le champ magnétique résultant. Le CND est souvent réalisé en plusieurs points de la pièce. Par conséquent, la bobine est déplacée au dessus de la pièce (5.1b). La variation du champ magnétique est détectée à l'aide d'une bobine ou d'un capteur de champ magnétique. Dans ce type de contrôle, ce sont des fréquences faibles (généralement inférieures à 10 MHz) qui sont utilisées. La longueur d'onde se trouve, alors, être grande devant la dimension de la pièce. Les propagations d'onde sont, de ce fait, négligeables.

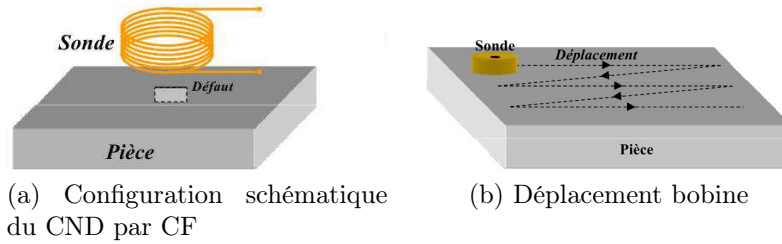


FIGURE 5.1 – CND par CF

Les avantages de cette méthode, par rapport aux autres procédés de CND, résident surtout dans sa simplicité de mise en œuvre, son coût réduit et la possibilité d'utiliser des appareils de contrôle à la fois petits, légers et rapides. De part sa haute sensibilité de détection et une possibilité d'automatisation, le CND par CF est une technique appréciée dans le secteur industriel. Néanmoins, il est à noter que cette technique est très sensible à la variation du lift-off (décollement entre la bobine et la pièce inspectée). Une bonne performance de contrôle implique donc d'avoir un lift-off de faible valeur. De plus, elle ne s'applique qu'à des matériaux électriquement conducteurs et est mal adaptée à l'inspection de défauts profonds puisque les CF se développent principalement sur la surface des pièces. Précisément et afin d'exprimer cette profondeur de pénétration des courants, on se place dans le cas d'une pièce infiniment plane qui est excitée par un champ émetteur extérieur uniforme qui lui est parallèle. Le module de la densité de courant $J(z)$ suivant l'axe $(0, z)$ est donné par la relation :

$$J(z) = J_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \quad (5.1)$$

où z est la profondeur considérée à l'intérieur de la pièce (en m), J_0 le module de la densité de courant à la surface de la pièce (en A/m²) et δ la profondeur de pénétration (ou épaisseur de peau) (en m) qui s'exprime comme :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad (5.2)$$

avec f la fréquence (en Hz), σ la conductivité électrique (en S/m) et μ la perméabilité magnétique (en H/m). La figure 5.2 donne la représentation de la pénétration des courants induits suivant la profondeur de la pièce. Il apparaît que la densité de courant décroît de manière exponentielle dans l'épaisseur de la pièce.

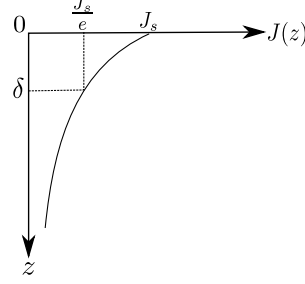


FIGURE 5.2 – Variation de l'amplitude des CF à l'intérieur d'un conducteur

Lors de la mise en œuvre du contrôle, diverses sondes et divers modes d'excitation sont envisageables [93]. Parmi eux, on choisit de se concentrer sur le montage le plus simple, une sonde constituée d'une bobine unique à la fois émettrice (crée le champ émetteur) et réceptrice (observe la modification du champ induit par la pièce) que l'on appelle sonde à double fonction. A cette sonde est associée un signal mono-fréquentiel. L'excitation est sinusoïdale de fréquence fixe. Sous cette configuration, l'interaction sonde-pièce s'effectue par mesure de l'impédance complexe de la sonde.

Dans le cas où le champ magnétique initial de la sonde n'est pas modifié (i.e. lorsque la sonde est suffisamment loin de la pièce conductrice pour que le champ créé par la bobine ne soit pas impacté), l'impédance de la bobine est de la forme :

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_{\text{exc}}} = R_0 + iX_0 \quad (5.3)$$

avec Z_0 l'impédance à vide (avec R_0 la résistance et X_0 la réactance à vide), V_0 la tension à vide et I_{exc} le courant d'excitation appliqué à la bobine. En présence d'un conducteur, l'impédance est modifiée (on la nomme Z_c) de telle sorte qu'elle s'écrit désormais :

$$Z_c = \frac{V_c}{I_{\text{exc}}} = R_c + iX_c \quad (5.4)$$

où R_c regroupe les pertes Joules dans la cible et dans la bobine et X_c dépend de la distribution spatiale des lignes de champ magnétique en présence de la pièce.

Afin de ne retenir que les variations dues à la présence de la pièce, la notion d'impédance normalisée est introduite [62]. Cette dernière s'exprime comme un rapport de Z_c sur Z_0 qui est donnée par la relation :

$$Z_n = \frac{Z_c - R_0}{X_0} = \frac{R_c - R_0}{X_0} + i \frac{X_c}{X_0} = R_n + iX_n \quad (5.5)$$

Généralement, l'impédance normalisée est représentée dans un plan de coordonnées où l'axe des abscisses désigne la résistance normalisée R_n et l'axe des ordonnées la réactance

normalisée X_n . La normalisation de l'impédance rend la mesure indépendante de certaines caractéristiques propres à la bobine excitatrice (nombre de spire, pertes à vide). L'impédance normalisée dépend d'une part de la fréquence d'excitation et de la géométrie de la sonde, et d'autre part des caractéristiques physiques (conductivité électrique, perméabilité magnétique) et géométrique de la pièce inspectée. Toute variation d'un paramètre de la pièce entraîne un déplacement du point représentatif de Z_n dans le plan d'impédance normalisée. La figure 5.3 représente les trajectoires que le point d'impédance de la sonde décrit pour des variations de conductivité électrique et lift-off.

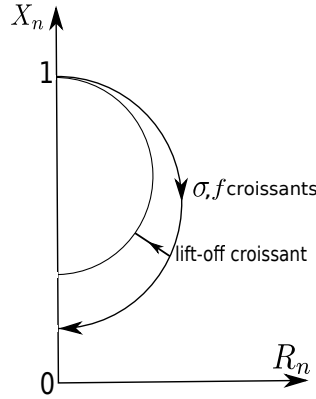


FIGURE 5.3 – Plan d'impédance normalisée

5.2 Modélisation du CND par CF

5.2.1 Intérêt de la modélisation

Dans la pratique, les configurations auxquelles sont appliquées des contrôles par CF sont extrêmement variées en termes de géométrie et de propriétés constitutives des matériaux. Afin d'obtenir un contrôle performant, il est important de concevoir des sondes appropriées. La modélisation du CND par CF trouve ainsi son utilité dans la conception de sonde. En effet, la simulation de l'interaction sonde-pièce permet de concevoir des systèmes de contrôle dont les performances auront été, préalablement, démontrées. La modélisation permet de définir des structures de sonde qui se trouvent être bien adaptées aux problématiques envisagées. L'intérêt principal est ainsi de prévoir les conséquences des structures de sonde sans la contrainte d'avoir à réaliser, en pratique, de multiples prototypes.

5.2.2 Cadre de la modélisation

Dans le cadre de la modélisation du contrôle par courants induits, le domaine d'étude contient une partie conductrice et une source \mathbf{J}_0 à support compact qui représentent, respectivement, la pièce à inspecter et la sonde. La figure 5.4 donne une illustration schématique du domaine d'étude considéré pour un problème de CF. L'ensemble des phénomènes électromagnétiques du problème est régi par les équations de Maxwell en régime

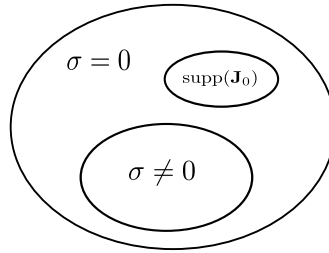


FIGURE 5.4 – Problème du CND par CF

harmonique (1.3)-(1.5)-(1.6)-(1.7). Les lois de comportements constitutives du système (1.9)-(1.10), ainsi que les conditions de transmission (1.11)-(1.14) et les conditions aux limites (1.15)-(1.16) s'appliquent également. Dans notre cas, on s'intéresse donc aux problèmes magnétodynamiques (dimensions géométriques petites devant la longueur d'onde et effets capacitifs négligés).

Bien que l'ensemble des formulations présentées dans le Chapitre 1 peut s'appliquer au cadre de la modélisation du CND par CF [33, 84, 108], on choisit d'étudier la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié (1.30). La résolution du problème se fait par la MEF.

5.2.3 Problématiques relatives à la modélisation

La MEF fait appel à une discrétisation du domaine d'étude. De ce fait, à chaque fois qu'un paramètre géométrique est modifié, un nouveau maillage doit être généré. Dans le cadre de la modélisation de contrôle par CF, il est donc à considérer autant de remaillages du domaine global que de position de la sonde (Fig. 5.5a). Le remaillage systématique de l'intégralité du domaine d'étude entraîne des contraintes informatiques non négligeables : d'une part le stockage de grands maillages peut faire appel à beaucoup de ressources informatiques, et d'autre part, il est nécessaire de relancer la résolution du problème pour chaque cas ce qui peut s'avérer très couteux en temps CPU. En résumé, la problématique de ce type de configuration pour le CND par CF est la prise en compte du déplacement de la sonde dans le domaine.

Une première solution envisagée est l'utilisation des méthodes de décomposition de domaine présentées dans le Chapitre 2 (Fig. 5.5b). Ces dernières s'adaptent bien à une grande variété d'applications, néanmoins, elles peuvent être difficiles à mettre en œuvre pour des configurations géométriques complexes. En effet, pour des géométries complexes, il n'est pas toujours possible de définir une interface de couplage invariante avec le mouvement (i.e une frontière discrétisée qui reste la même pour tous les changements géométriques). Une deuxième solution est de s'affranchir de la contrainte de l'interface invariante avec le mouvement, en utilisant une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement (Fig. 5.5c). On peut espérer diminuer le stockage machine et le temps CPU pour des configurations géométries complexes. Ces travaux de thèse se proposent de mettre en application cette dernière solution.

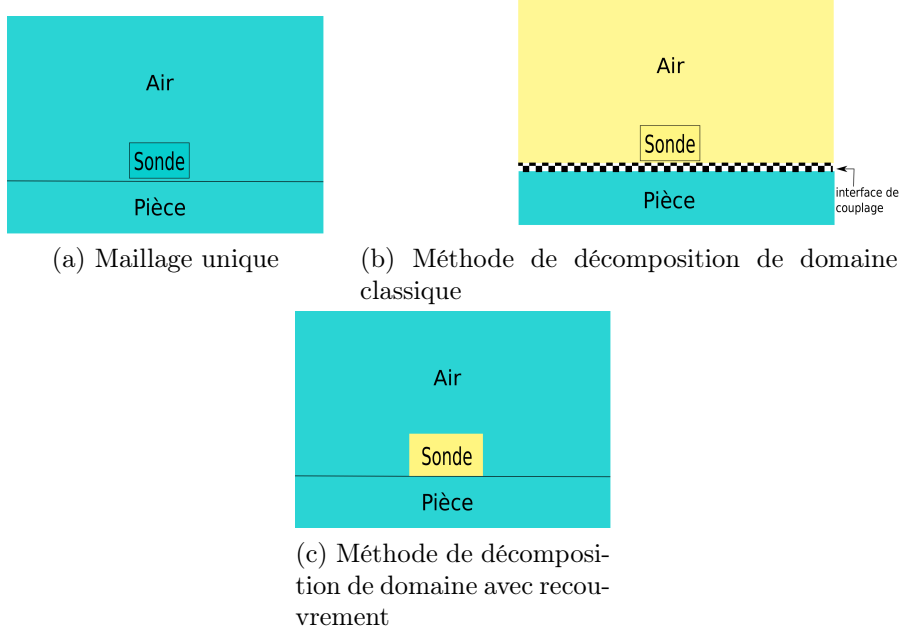


FIGURE 5.5 – Prises en compte du déplacement de la sonde : en bleu domaine fixe, en jaune domaine mobile

5.3 Application de la MEM avec recouvrement

Soit Ω le domaine d'étude considéré présenté dans la figure 5.4. Comme le champ magnétique est concentré autour de la sonde, la partie mobile Ω_M contient d'une part la géométrie de la sonde et d'autre part une enveloppe d'air proche de celle-ci. La figure 5.6 illustre le choix de la décomposition de domaine mise en place dans le cadre de la modélisation du CND par CF.

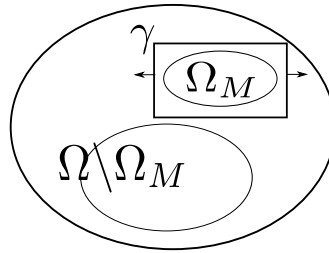


FIGURE 5.6 – Décomposition de domaine

Par la suite, on notera la partie fixe de la modélisation comme $\Omega_F = \Omega \setminus \Omega_M$. On s'intéresse à la formulation en potentiel vecteur magnétique modifié des équations de Maxwell en régime harmonique, dont on rappelle, ici, la formulation :

$$i\omega\sigma\mathbf{A}^* + \mathbf{rot}(\mu^{-1}\mathbf{rot}\mathbf{A}^*) = \mathbf{J}_0 \quad (5.6)$$

où le potentiel \mathbf{A}^* est introduit à partir de $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}^*$ et $\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A}^*$. Le champ magnétique est défini dans le plan $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ tel que $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$, ce qui donne $\mathbf{A}^* =$

$(0, 0, A)$.

Dans le cadre de la décomposition de domaine, le système à résoudre prend la forme suivante :

$$i\omega\sigma A_F(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla A_F(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (5.7)$$

$$-\nabla \cdot (\mu^{-1} \nabla A_M(\mathbf{x})) = J_0(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega_M \quad (5.8)$$

$$A_F(\mathbf{x}) = A_M(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \gamma \quad (5.9)$$

$$\mu^{-1} \partial_n A_F(\mathbf{x}) = \mu^{-1} \partial_n A_M(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \gamma \quad (5.10)$$

$$A_F(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (5.11)$$

$$(5.12)$$

Il en vient le problème variationnel : trouver $(A, A_M) \in H_{0,A_M}^1(\Omega_F) \times H_A^1(\Omega_M)$ tel que :

$$\int_{\Omega_F} i\omega\sigma A A' + \int_{\Omega_F} \mu^{-1} \nabla A \cdot \nabla A' = 0, \quad \forall A' \in H_0^1(\Omega_F) \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega_M} \mu^{-1} \nabla A_M \cdot \nabla A'_M = \int_{\text{supp} J_0} J_0 A'_M, \quad \forall A'_M \in H_0^1(\Omega_M) \quad (5.14)$$

avec $H_{0,A_M}^1(\Omega_F) = \{A \in H_0^1(\Omega_F), A = A_M \text{ sur } \gamma\}$ et $H_A^1(\Omega_M) = \{A_M \in H^1(\Omega_M), A_M = A \text{ sur } \gamma\}$. Chaque domaine est discrétisé de manière indépendante \mathcal{T}_H pour Ω_F et \mathcal{T}_h pour Ω_M . Ces maillages sont non-conformes et recouverts. On considère, également, que le pas de discrétisation est plus petit dans Ω_M que dans Ω_F (Fig.5.7) tel que $h < H$. Ceci s'explique par le fait que l'on désire avoir une meilleure précision du champ, et ainsi du calcul de l'impédance, dans et autour de la sonde.

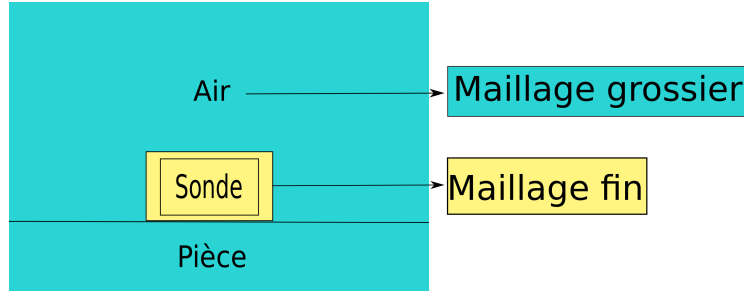


FIGURE 5.7 – Stratégie de maillage dans le cadre de la décomposition de domaine

Pour rappel, il faut également prendre en compte la profondeur de pénétration du champ magnétique dans la pièce : on admet un minimum de 3 éléments dans l'épaisseur de peau.

5.4 Résultats

Dans un premier temps, on examine la solution obtenue en absence de défaut dans la pièce à inspecter : champ magnétique et impédance normalisée. Dans un second temps, on regarde le comportement de la solution en présence d'un défaut dans la pièce : champ magnétique et variation du flux magnétique. Finalement, un exemple d'application présentant une géométrie complexe est exposé.

5.4.1 En absence de défaut

On regarde le comportement de la solution numérique en l'absence de défaut dans la pièce à inspecter. On considère une modélisation du CND par CF dont la géométrie est définie par les données présentées dans le tableau 5.1. De plus, le bobine est constituée de

Longueur pièce	10	Rayon interne sonde	6.15
Hauteur pièce	12.4	Rayon externe sonde	12.4
Longueur domaine	10	Hauteur sonde	6.1
Hauteur domaine	62.4	Longueur boîte mobile	40
Lift-off	2.3	Hauteur boîte mobile	99

TABLE 5.1 – Dimensions en millimètres

100 spires. Le tableau 5.2 donne les valeurs des coefficients physiques intervenant dans la simulation, et notamment les propriétés électromagnétiques du milieu conducteur σ et μ . Les maillages de Ω_F et Ω_M ont, respectivement, 12032 et 3832 éléments.

J_s	1 A/mm ²	σ	30 MS/m
Fréquence	225 kHz	μ	μ_0

TABLE 5.2 – Valeurs des coefficients physiques

La résolution du système se fait par une inversion matricielle directe. La figure 5.8 présente le potentiel vecteur magnétique. Les champs sont conformes aux résultats attendus : ils se concentrent autour de la sonde, ils sont atténués dans la profondeur de la pièce (effet de peau).

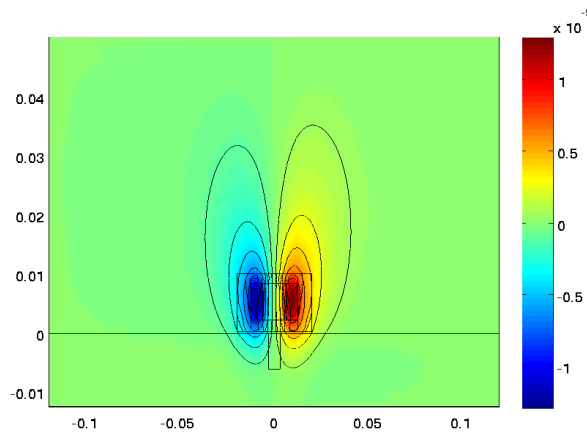
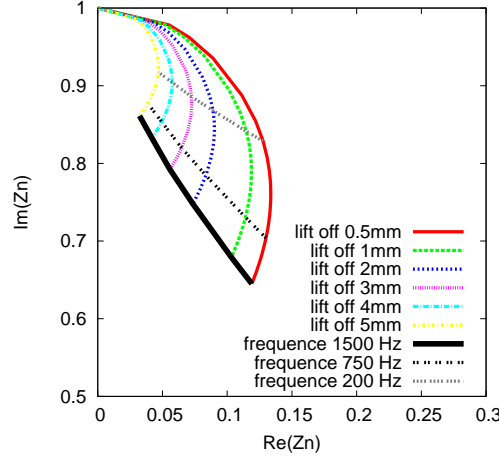


FIGURE 5.8 – Potentiel vecteur magnétique (en T.m)

L'impédance normalisée (5.5) dans le plan complexe obtenue en présence de la décomposition de domaine est donnée par la figure 5.9 pour différentes valeurs de lift-off et de fréquence. Le lift-off apparaît comme une caractéristique géométrique importante qui

FIGURE 5.9 – Représentation de Z_n dans le plan d'impédance normalisée

peut avoir un impact négatif sur la détection de défaut : plus le lift-off est grand moins la détection est efficace. La mise en œuvre de la MEM avec recouvrement conserve bien les propriétés de la modélisation du CND par CF (Fig. 5.3 et [72]).

5.4.2 En présence de défaut

Désormais, un défaut débouchant du côté où se trouve la bobine dont les dimensions sont données dans le tableau 5.3, est placé dans la pièce à inspectée. Les paramètres géométriques et physiques du milieu sont repris du cas précédent.

Longueur défaut	6.2	Hauteur défaut	6.1
-----------------	-----	----------------	-----

TABLE 5.3 – Dimensions du défaut en millimètres

Le potentiel vecteur magnétique A , ainsi que les lignes de champs, obtenus pour 3 positions de la sonde sont présentés dans la figure 5.10 : la première position (Fig.5.10a) est celle pour laquelle la sonde est placée en amont du défaut, pour la deuxième (Fig.5.10b) la sonde est centrée au dessus du défaut et pour la dernière (Fig.5.10c) la sonde est en aval du défaut. Le comportement est conforme aux résultats obtenus en pratique : le champ diminue dans la pièce conductrice (effet de peau), le champ tourne autour de la section de la bobine.

La variation de l'impédance ΔZ du système, due à la présence du défaut, peut se déduire à partir de l'égalité suivante :

$$\Delta Z = \frac{2ifN^2\pi}{J_0Sb} \Delta\phi \quad (5.15)$$

avec N le nombre de spires dans la bobine, Sb l'aire d'une section de la bobine et $\Delta\phi$ la variation du flux magnétique dans la bobine tel que :

$$\Delta\phi = \phi - \phi_0 \quad (5.16)$$

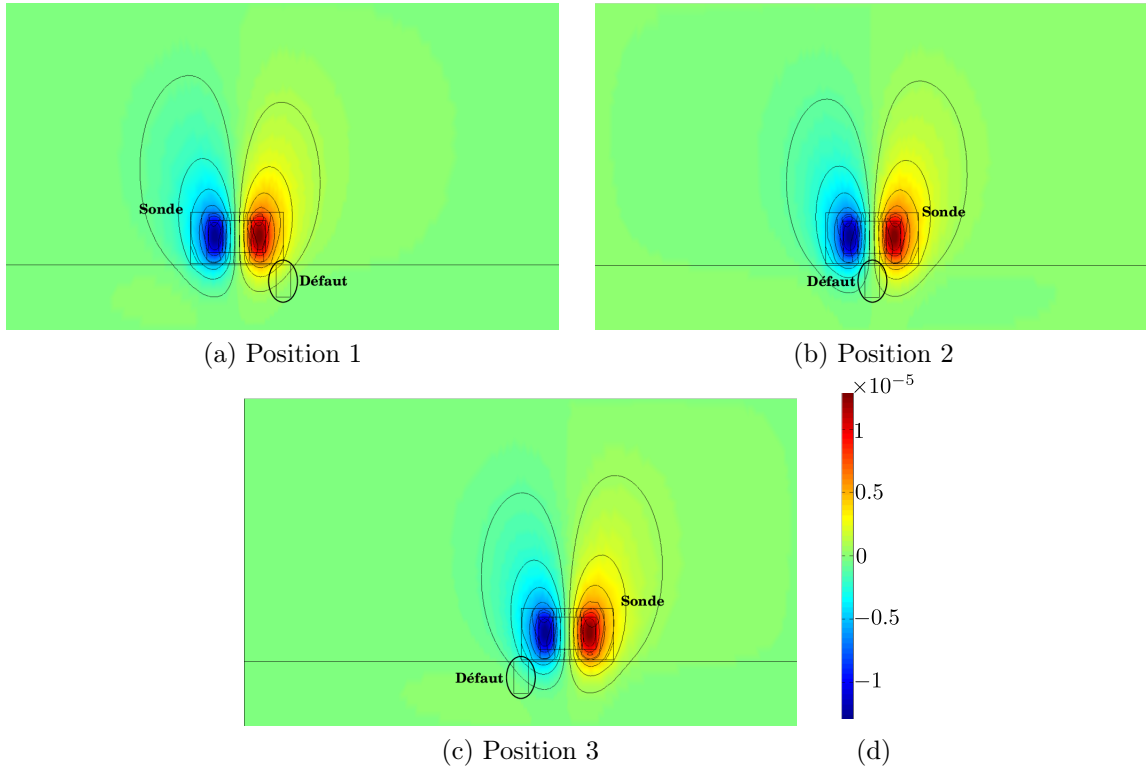


FIGURE 5.10 – Déplacement de la sonde : potentiel vecteur magnétique (en T.m) et lignes de champ

avec ϕ le flux magnétique de la bobine en présence du défaut et ϕ_0 celui sans défaut. Lors du déplacement de la sonde, seul $\Delta\phi$ est modifié dans (5.15), les autres paramètres étant constants. Par conséquent, la variation de l'impédance est proportionnelle à la variation du flux magnétique de la sonde. Le courant source étant pris comme référence de phase, la partie réelle du flux correspond alors à la partie imaginaire de l'impédance et inversement. Une comparaison des flux magnétiques de la solution obtenue avec la MEM avec recouvrement et de la solution obtenue avec la PDE de Matlab est réalisée. La figure 5.11 représente la comparaison des flux en fonction de la position de la sonde dans le plan.

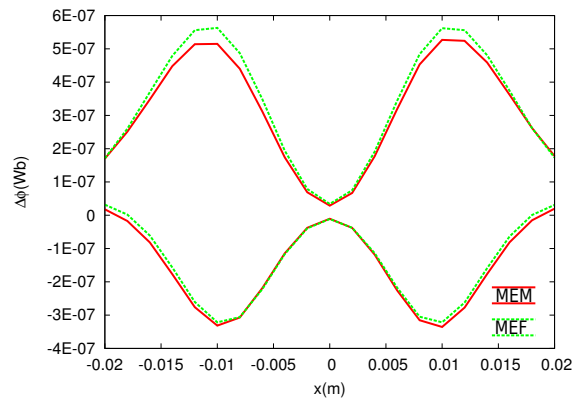


FIGURE 5.11 – Variation du flux magnétique (en Wb)

En mesurant les pourcentages d'erreurs obtenus, il apparaît que la méthode commet environ 2% d'erreur moyenne sur le flux magnétique de la sonde. Le tableau 5.4 donne les valeurs des flux calculées par la MEM et par la PDE Matlab pour plusieurs positions de la sonde (la position initiale 0 correspond à la figure 5.10b).

Position(mm)	Sonde		
	ϕ -MEM (Wb)	ϕ -Matlab (Wb)	Erreur (%)
-20	1.73e-07 - 2.52e-08i	1.71e-07 - 3.18e-08i	1.1
-10	5.48e-07 - 3.31e-07i	5.63e-07 - 3.22e-07i	2.6
0	3.20e-08 - 1.07e-08i	3.40e-08 - 1.11e-08i	5
10	5.50e-07 - 3.32e-07i	5.62e-07 - 3.22e-07i	2.1
20	1.75e-07 - 2.57e-08i	1.73e-07 - 3.11e-08i	1.1

TABLE 5.4 – Flux et erreur en % entre la solution de la MEM avec recouvrement et la solution de la PDE de Matlab pour différentes positions de la sonde

5.4.3 En présence d'une géométrie complexe

L'application 2D présentée, par la suite, est inspirée du contrôle de la zone de transition de dudgeonnage d'un tube de générateur de vapeur à l'aide d'une sonde. La figure 5.12 présente la configuration géométrique associée à ce problème.

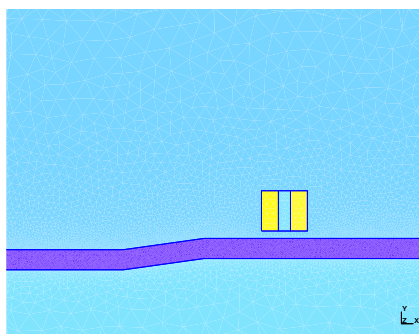


FIGURE 5.12 – Dudgeonnage : configuration géométrique

De part la présence d'un décrochage au sein de la géométrie de la pièce à inspecter, les techniques de décomposition de domaine usuelles, telles que décrites dans le Chapitre 2, s'avèrent délicates à mettre en œuvre. En effet, la géométrie de l'interface de couplage varie en fonction de la position de la sonde dans le domaine. La méthode développée dans ce mémoire peut être employée pour ce type de configuration. On en présente donc son application.

Les caractéristiques géométriques de la configuration considérée sont données dans le tableau 5.5. Le tableau 5.6 indiquent les valeurs physiques mises en jeu dans la simulation. La solution numérique obtenue est présentée pour 3 positions de la sonde dans le domaine par la figure 5.13 : la sonde est placée en amont de la zone de transition, en position 2 la sonde est inclinée sur la zone de transition et enfin en la sonde est aval de la zone de transition.

Longueur pièce	75	Rayon interne sonde	0.75
Hauteur pièce	1.25	Rayon externe sonde	2.85
Longueur domaine	75	Hauteur sonde	2.34
Hauteur domaine	25	Longueur boîte mobile	8
Lift-off	0.29	Hauteur boîte mobile	8
Longueur décrochage	5	Hauteur décrochage	0.7

TABLE 5.5 – Caractéristiques géométriques du problème de dudgeonnage en millimètres

μ	μ_0	σ	1 MS.m^{-1}
J_s	3 A/mm^2	Fréquence	100 kHz

TABLE 5.6 – Paramètres physiques du problème de dudgeonnage

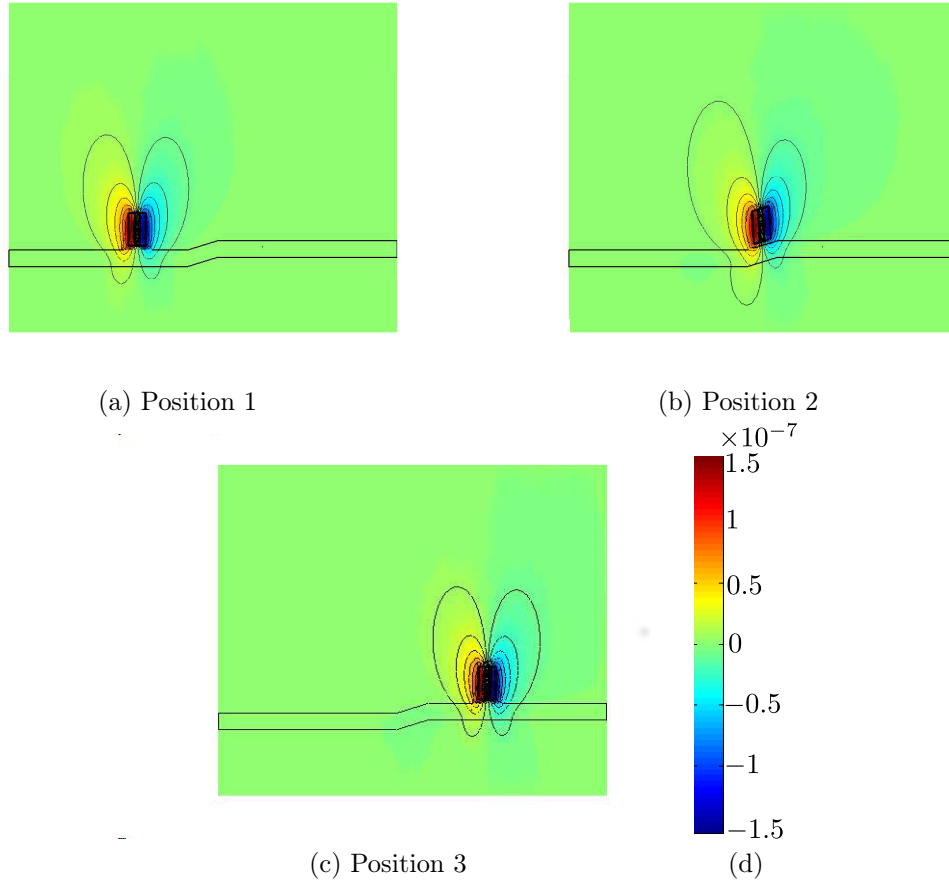


FIGURE 5.13 – Déplacement de la sonde : potentiel vecteur magnétique (en T.m) et lignes de champ

D'une part, on constate que sur les parties planes de la plaque (amont et aval de la zone de transition) le champ magnétique se concentre autour des sections de la bobine. Au niveau de la zone de transition, on observe bien une dissymétrie de la répartition du

5.5 Conclusion

champ. D'autre part, il apparaît que la méthode que nous avons introduite s'adapte bien à la géométrie de la pièce.

Une comparaison avec une résolution par une MEF, sans décomposition de domaine, indique également que la solution obtenue précédemment est à la fois qualitativement et quantitativement acceptable (tableau 5.7)

Position	Sonde		
	ϕ -MEM (Wb)	ϕ -MEF (Wb)	Erreur (%)
1	2.67e-07 - 1.24e-08i	2.71e-07 - 1.22e-08i	1.5
2	2.62e-07 - 1.69e-08i	2.68e-07 - 1.65e-08i	2.2
3	2.68e-07 - 1.24e-08i	2.71e-07 - 1.21e-08i	1.1

TABLE 5.7 – Flux et erreur en % entre la solution de la MEM et la solution de la MEF pour différentes positions de la sonde

5.5 Conclusion

Les résultats présentés dans ce chapitre ont permis d'illustrer la flexibilité et la précision de la MEM avec recouvrement sur des cas de CND par CF. Ce couplage a, notamment, traité divers problèmes de CND par CF : pièce sans défaut, pièce avec défaut et géométrie complexe. Une comparaison à un calcul de référence MEF sur un maillage unique (i.e. sans décomposition de domaine) a montré le bon comportement numérique de la solution obtenue avec la MEM en recouvrement de maillages. Par ailleurs, ces calculs ont mis en évidence l'avantage d'une décomposition de domaine entre les parties en mouvement et celles restant fixes. En effet, il apparaît que les maillages de chaque sous domaine une fois générés permettent de réaliser plusieurs configurations géométriques possibles (équivalentes à plusieurs positions de la sonde dans le domaine).

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse a été de développer une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement basée sur la théorie associée à la méthode des éléments finis avec joints. Ces travaux se sont inscrits dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell pour la simulation du contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault (CF). On a souhaité rendre la source mobile dans le problème ce qui a impliqué de réaliser des échanges réciproques entre les différents domaines. La finalité d'une telle approche était de prendre en compte le mouvement dans la modélisation sans avoir recours au remaillage systématique de l'intégralité du domaine qui entraîne une augmentation du temps CPU.

Résultats principaux

Après avoir présenté le cadre physique et les outils mathématiques intervenant dans ce travail, une présentation et par la suite une comparaison de différentes méthodes de décomposition de domaine ont été effectuées. Cela a permis de justifier, d'une part, l'utilisation du cadre théorique associé à la méthode des éléments finis avec joints (notée MEM), et d'autre part, l'emploi d'une décomposition de domaine avec des discrétisations qui se recouvrent. Ces choix sont motivés par l'intérêt de mettre au point une technique de décomposition de domaine précise, optimale (l'erreur de la solution globale est majorée par la somme des erreurs sur chaque sous-domaine) et flexible (apportée par la théorie de la MEM) pour laquelle la contrainte d'une interface d'échange invariante avec le mouvement a été levée.

Par la suite, la méthode a été développée théoriquement pour un problème faisant intervenir des inconnues scalaires et vectorielles. Les formulations continues et discrètes ont été présentées. L'accent a été mis sur les opérateurs de projection intervenant dans les espaces variationnels. Ces opérateurs ont été choisis afin d'assurer la stabilité et l'optimalité de la méthode. Des études, quant aux erreurs d'approximation introduites par la méthode ont été décrites ce qui a permis d'aboutir à des estimations d'erreurs a priori.

Une partie importante de ce travail de thèse a reposé sur la mise en œuvre de la MEM en recouvrement de maillages. Il est apparu que l'évaluation des matrices de couplage (i.e. celles permettant l'échange d'information dans le système matriciel) était un point crucial pour assurer le bon comportement de la méthode. Il a donc été nécessaire de mettre en œuvre des techniques de calcul précises et efficaces (type intégrations numériques) qui ont permis d'évaluer les matrices en question.

Des expériences numériques relatives à la précision en maillage ont été réalisées sur des cas test simples pour lesquelles une solution exacte est connue. La méthode ne pénalise pas la

convergence portée par la méthode des éléments finis. En outre, les ordres de convergence obtenus correspondent aux résultats théoriques précédemment décrits. De ce fait, en plus de la précision, l'optimalité de la méthode a pu être démontrée numériquement.

Enfin, la technique a été appliquée à des problèmes bidimensionnels de modélisation du CND par CF. Les principales caractéristiques relatives à une telle modélisation ont été retrouvées (évolution de l'impédance en fonction de la fréquence et du lift-off, variation du flux en présence de défaut). Finalement, un cas de modélisation en présence d'une configuration géométrique complexe a été proposé montrant la flexibilité de la méthode. Les principaux résultats de ce travail, rappelés ci-dessus, sont encourageants au sens où ils tendent à indiquer que la méthode est précise et bien adaptée à des géométries complexes. Cependant, il reste, bien évidemment, des questions ouvertes ainsi que des pistes de recherche qu'il serait intéressant d'approfondir.

Perspectives

La méthode présentée dans ces travaux effectue des échanges d'information entre domaines recouverts et non-conformes entre eux. Les espaces des multiplicateurs de Lagrange ont été choisis les plus simples possibles. Il existe d'autres possibilités d'espaces [107] qui pourraient augmenter, encore, la précision de la technique en étant mieux adaptés aux configurations envisagées.

De plus, il serait intéressant de compléter ce travail en se focalisant sur le recouvrement de domaines ayant des propriétés physiques différentes. Une piste envisageable serait, par exemple, d'imposer au domaine mobile d'absorber les caractéristiques physiques de la partie du domaine fixe qu'il recouvre. En ce sens, l'intégration adaptative comme présentée dans [86, 92] semble être une piste sérieuse de réflexion.

L'intérêt des méthodes de décomposition réside également dans leur possibilité d'être facilement parallélisable. Les outils de parallélisation étant de plus en plus performants, il serait intéressant de les utiliser dans le but de mettre en valeur les avantages informatiques apportés par la décomposition de domaine.

L'aspect tridimensionnel n'a pas été abordé dans ces travaux, il est bien évident qu'il constitue l'objectif principal du développement d'une telle méthode. L'extension de la méthode en 3D apparaît comme un travail numériquement plus complexe que le cas bidimensionnel (la partie théorique ayant déjà été examinée en 2D). En effet, les échanges d'information se réaliseront, désormais, au travers de surfaces de couplage. Il sera, donc, nécessaire de déterminer des intersections entre des éléments volumiques et surfaciques, lesquelles permettront d'évaluer les matrices de couplage du système. L'application à des modélisations 3D du CND par CF constitue un intérêt majeur pour les industriels.

Les perspectives de la décomposition de domaine étudiée dans ce travail de thèse s'étendent au-delà de la modélisation du CND par CF. La résolution des équations de Maxwell recèle de nombreuses applications à caractère industriel auxquelles la méthode traitée peut se prêter. Par ailleurs, il est important de rappeler que la méthode développée est basée sur la MEM qui est une méthode de décomposition de domaine aujourd'hui, largement répandue au-delà même de l'électromagnétisme. Les modélisations envisageables sont, de ce fait, tout aussi variées.

Annexe A

Cas électrostatique

Cette annexe présente les validations numériques de la méthode développée dans ce travail de thèse pour un problème statique (i.e. pas de variable en temps). Dans ce cas, le système matriciel est à résoudre une seule et unique fois. Ce cas est également valable pour un problème en régime harmonique.

A.1 Problème électrostatique

Soit un cylindre infini d'axe (O, z) uniformément chargé en volume, de densité volumique de charge ρ , de section circulaire de rayon $R = 0,2$ m (Fig.A.1). Le domaine d'étude Ω est donc un disque de centre $(0,0)$ et de rayon 2 m. En se plaçant dans le repère d'axe $(M, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ la distribution du champ électrique est invariante à la fois par translation suivant $(0, z)$ et à la fois par rotation autour de (O, z) . Le calcul du champ électrique $\mathbf{E}(r, \theta, z)$ se réduit alors à $\mathbf{E}(r)\vec{u}_r$ avec $r \in [0, 2]$. On cherche, alors, à résoudre un problème électrostatique régit par les équations :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{A.1})$$

Par le Lemme de Poincaré, on introduit le potentiel scalaire électrique V par $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$, ce qui donne, le problème d'inconnue V suivant :

$$\varepsilon \Delta V = -\rho. \quad (\text{A.2})$$

où ε est considéré uniforme dans le domaine d'étude. Des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur Ω .

La décomposition de domaine retenue, ici, est telle que Ω_M est un disque de centre $(0,0)$ de rayon 0.4 m avec $\text{supp}(\rho) \subset \Omega_M$, et $\Omega_F = \Omega \setminus \Omega_M$.

La solution exacte de ce problème est :

en terme de champ électrique

$$\mathbf{E}^{\text{exa}}(r) = \begin{cases} \frac{0.04\rho}{2\sigma r} \vec{u}_r; & r \geq 0.2, \\ \frac{\rho r}{2\sigma} \vec{u}_r; & r \leq 0.2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

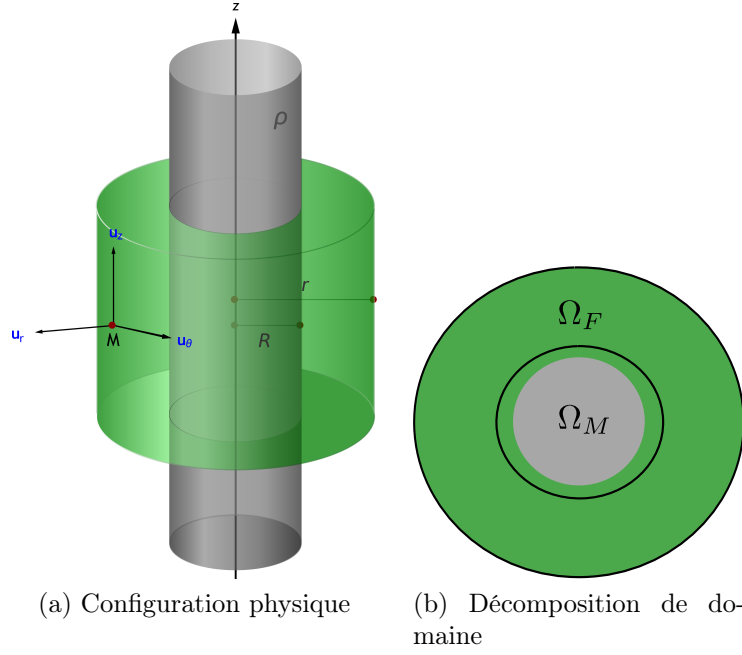


FIGURE A.1 – Domaine d'étude

en terme de potentiel scalaire électrique

$$V^{\text{exa}}(r) = \begin{cases} \frac{0.04\rho}{2\sigma} \ln\left(\frac{2}{r}\right), & r \geq 0.2 \\ -\frac{\rho r^2}{4\sigma} + \frac{0.04\rho}{2\sigma} \left(\frac{1}{2} + \ln(10)\right), & r \leq 0.2. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

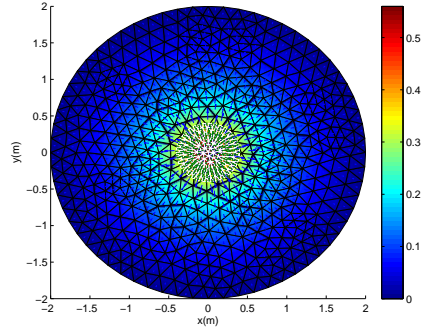
A chaque domaine est associé une discrétisation, \mathcal{T}_H pour Ω_F et \mathcal{T}_h pour Ω_M . Ces maillages sont non-conformes, indépendants et \mathcal{T}_h et \mathcal{T}_H se recouvrent.

A.2 Résultats numériques

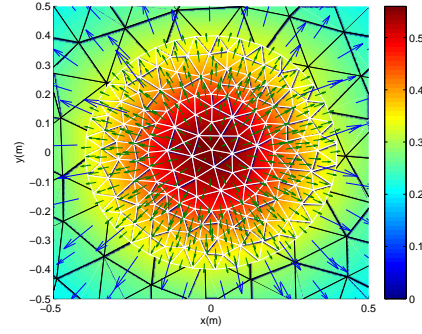
La figure A.2 donne une représentation de la solution numérique obtenue pour $H = 1/12$ m et $h = 1/48$ m. Il apparaît, dans un premier temps (Fig.A.2a et Fig.A.2b), que l'on obtient une répartition du champ électrique et de la norme de ce dernier conforme à celle à laquelle on s'attendait. Les figures A.2c et A.2d confirment le bon comportement de la solution obtenue au regard de la solution exacte.

Le tableau A.1 présente une étude de l'erreur commise, en norme L^2 et H^1 , par la méthode en fonction des raffinements successifs des maillages dans chaque domaine. Il apparaît bien que les erreurs diminuent avec le raffinement de maillage. On retrouve de l'ordre de 2 en norme L^2 et 1 en norme H^1 . Ce qui est confirmé par les courbes de convergence en maillage (Fig.A.3).

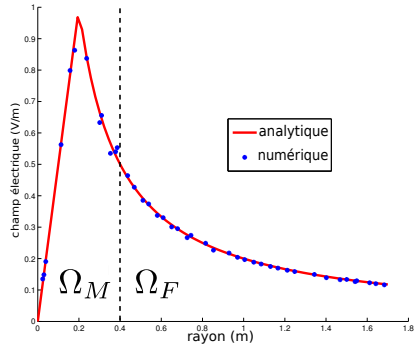
A.2 Résultats numériques



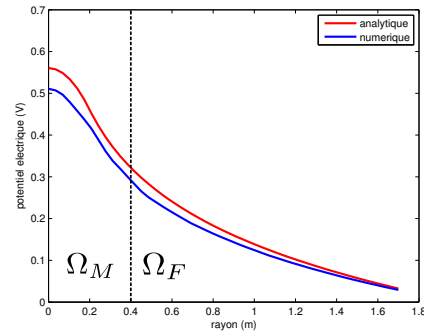
(a) Distribution du champ électrique (vecteur et norme en V/m)



(b) Distribution du champ électrique (vecteur et norme en V/m) : zoom



(c) Distribution du champ électrique sur un rayon

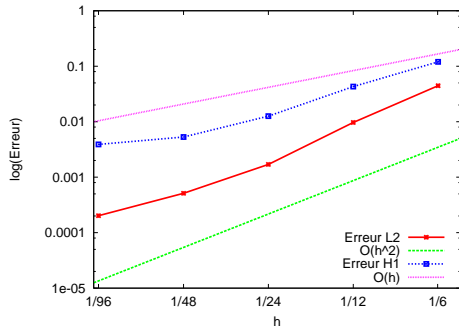


(d) Distribution du potentiel scalaire électrique (en V) sur un rayon

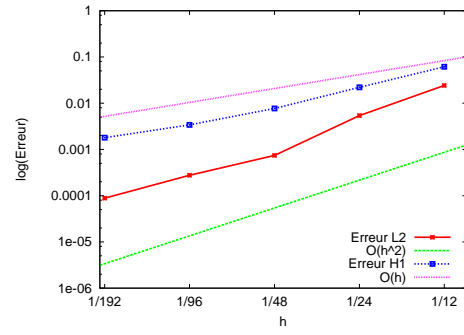
FIGURE A.2 – Solution numérique

H	Erreurs L^2						Erreurs H^1						h
	Ω_F		Ω_M		Ω		Ω_F		Ω_M		Ω		
1/6	4,45E-02	-	2,42E-02	-	5,06E-02	-	1,20E-01	-	6,13E-02	-	1,34E-01	-	1/12
1/12	9,70E-03	2,2	5,40E-03	2,2	1,11E-02	2,2	4,30E-02	1,5	2,21E-02	1,5	4,84E-02	1,5	1/24
1/24	1,70E-03	2,5	7,44E-04	2,9	1,80E-03	2,6	1,26E-02	1,8	7,70E-03	1,5	1,48E-02	1,7	1/48
1/48	5,13E-04	1,7	2,76E-04	1,4	5,82E-04	1,6	5,30E-03	1,2	3,40E-03	1,2	6,30E-03	1,2	1/96
1/96	2,02E-04	1,3	8,84E-05	1,6	2,20E-04	1,4	3,90E-03	0,4	1,80E-03	0,9	4,30E-03	0,5	1/192

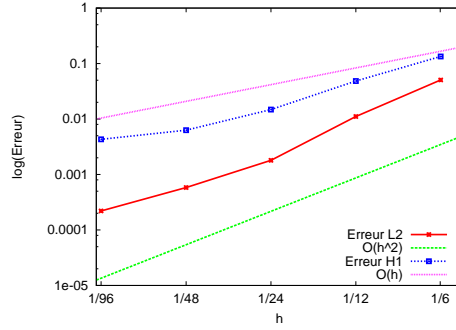
TABLE A.1 – Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 cas test nodal statique



(a) Convergence en maillage Ω_F



(b) Convergence en maillage Ω_M



(c) Convergence en maillage Ω

FIGURE A.3 – Courbes de convergence en maillage

Annexe B

Condensation de Guyan - Performances comparées

Cette annexe montre l'intérêt d'effectuer une condensation de Guyan dans le système matriciel final comme présenté dans le Chapitre 4 (section 4.2). Pour rappel, la condensation permet de considérer des degrés de liberté, que l'on aura choisis, comme "maître" dans la système matriciel. Une étude comparative de la précision de la solution avec et sans condensation est réalisée. On s'appuie sur le cas test électrostatique développé dans l'Annexe A.

B.1 Système matriciel final sans condensation de Guyan

Pour rappel, en plus d'effectuer une résolution simultanée des équations dans chacun des sous-domaines, les conditions de couplage (4.5) et (4.12) sont imposées par une méthode de pénalisation par multiplicateurs de Lagrange. Le système matriciel final prend la forme :

$$\mathbb{M}\mathbf{U} = \mathbb{F} \quad (\text{B.1})$$

où \mathbb{M} est la matrice globale, \mathbf{U} le vecteur des inconnues et \mathbb{F} le second membre. Ils s'expriment comme :

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbb{M}_F & 0 & 0 & & \\ 0 & M_{II} & M_{I\gamma} & & \\ 0 & M_{\gamma I} & M_{\gamma\gamma} & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -D & C & 0 \\ E & [& -H] \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_H, \mathbf{U}_{h|I}, \mathbf{U}_{h|\gamma}, \lambda_\gamma, \lambda_\Gamma)',$$

$$\mathbb{F} = (0, \mathbb{F}_{h|I}, \mathbb{F}_{h|\gamma}, 0, 0)'.$$

La résolution est effectuée par une inversion direct du système linéaire.

B.2 Résultats numériques

Les figures B.1, B.2 et B.3 représentent la solution analytique ainsi que les solutions globales obtenues avec la MEM avec et sans condensation de Guyan. En particulier, ces figures illustrent l'évolution du potentiel scalaire électrique sur un rayon du domaine pour différents pas de discrétisation de maillage.

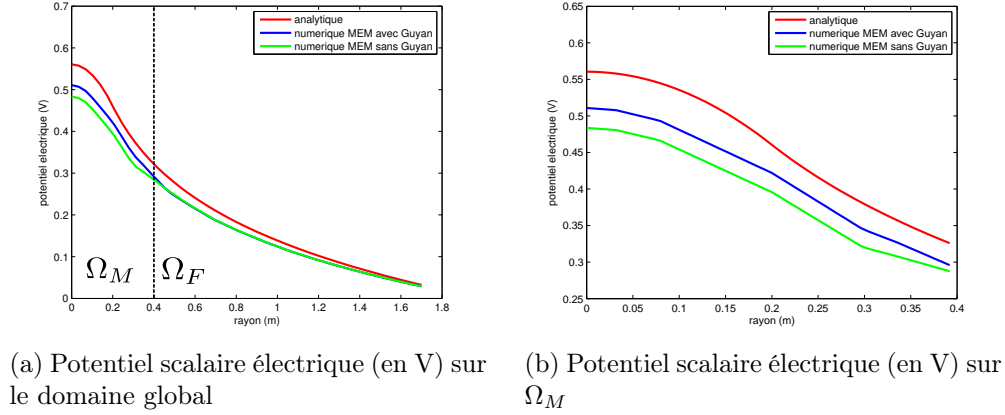


FIGURE B.1 – Comparaison solution analytique (rouge), solutions MEM avec condensation de Guyan (bleue) et sans condensation (verte) sur un rayon pour $H = 1/12$ et $h = 1/12$

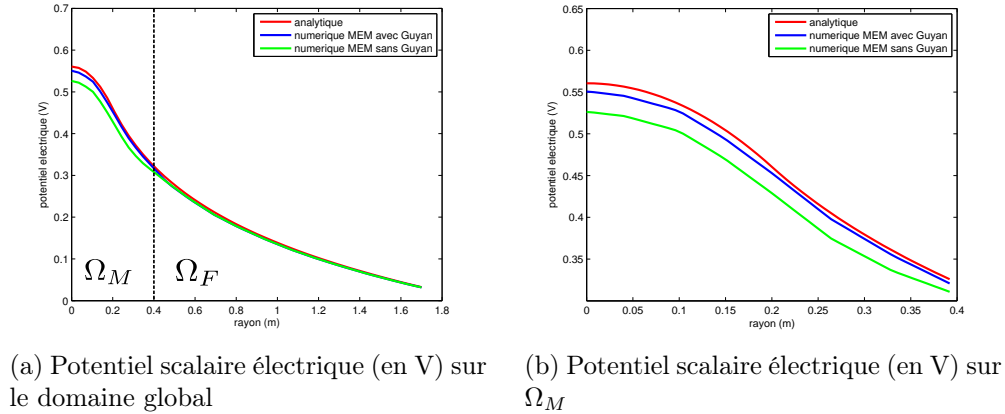
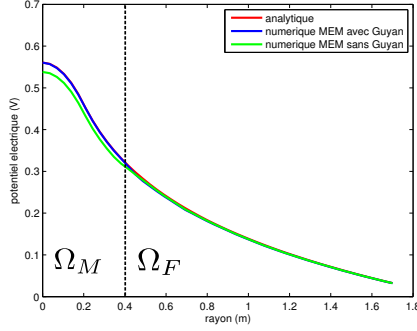


FIGURE B.2 – Comparaison pour $H = 1/12$ et $h = 1/24$

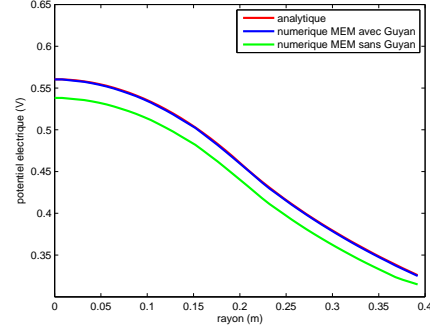
Alors que la solution numérique obtenue avec la condensation converge vers la solution analytique, avec le raffinement du maillage, la solution numérique calculée sans condensation semble converger plus lentement. En outre, la solution est pénalisée sur le domaine Ω_M (on voit que la solution commet une erreur plus importante, l'écart entre les courbes étant plus grand).

Le tableau B.1 détaille les erreurs commises en norme L^2 et semi-norme H^1 et les ordres de convergence en maillage obtenus par la méthode sans condensation de Guyan pour des raffinements successifs des maillages dans chaque domaine. A la vue des résultats

B.2 Résultats numériques



(a) Potentiel scalaire électrique (en V) sur le domaine global



(b) Potentiel scalaire électrique (en V) sur Ω_M

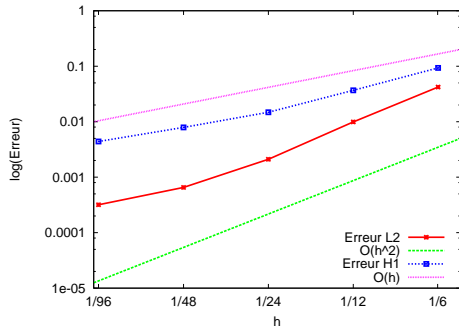
FIGURE B.3 – Comparaison pour $H = 1/12$ et $h = 1/48$

H	Erreurs L^2						Erreurs H^1						h
	Ω_F		Ω_M		Ω		Ω_F		Ω_M		Ω		
1/6	4,21E-02	-	2,32E-02	-	7,32E-02	-	9,32E-02	-	6,08E-02	-	2,47E-01	-	1/12
1/12	9,90E-03	2,1	4,80E-03	2,2	2,31E-02	1,6	3,68E-02	1,3	2,11E-02	1,5	1,31E-01	0,9	1/24
1/24	2,10E-03	2,2	6,75E-04	2,9	8,70E-03	1,4	1,48E-02	1,3	7,90E-03	1,4	8,35E-02	0,6	1/48
1/48	6,54E-04	1,7	2,30E-04	1,5	4,20E-03	1,0	7,90E-03	0,9	4,30E-03	0,8	6,07E-02	0,4	1/96
1/96	3,18E-04	1,0	1,35E-04	0,7	2,10E-03	1,0	6,40E-03	0,3	3,40E-03	0,3	4,11E-02	0,5	1/192

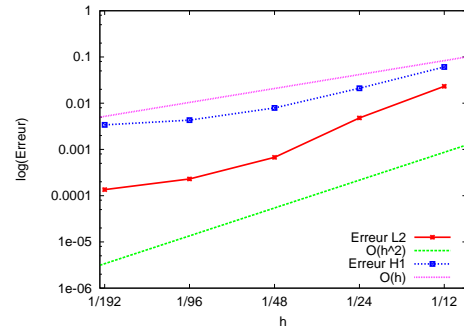
TABLE B.1 – Erreurs et ordres en normes L^2 et H^1 sans condensation de Guyan

obtenus, et bien que les erreurs soient globalement du même ordre de grandeur que celles obtenues dans l'Annexe A (voir tableau A.1), les ordres de convergence sont, quant à eux, plus faibles, en particulier pour la solution globale sur Ω . En effet, sans condensation de Guyan, la solution globale convergence à l'ordre 1 en norme L^2 et semi-norme H^1 . Ces constats sont confirmés par les courbes de convergence en maillage (Fig.B.4).

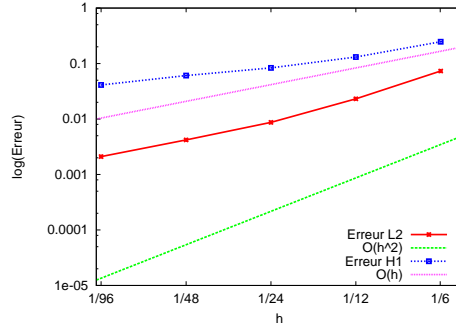
Au final, l'absence de condensation dégrade la qualité de la méthode et particulièrement l'ordre de convergence global qui en découle.



(a) Convergence en maillage Ω_F



(b) Convergence en maillage Ω_M



(c) Convergence en maillage Ω

FIGURE B.4 – Courbes de convergence en maillage

Annexe C

Stratégie de recherche en maillage et gain en temps

Cette annexe décrit la stratégie de recherche en maillage mise en œuvre dans le cadre des travaux de cette thèse. Le gain en temps CPU qui en découle est examiné. Cette annexe présente également des résultats préliminaires quant à l'étude du gain en temps apportée par la méthode de décomposition de domaine.

C.1 Motivations

La méthode développée dans ce travail de thèse vise à éviter le remaillage systématique de l'intégralité du domaine lorsque une configuration géométrique est modifiée. En particulier, dans le cadre de la modélisation du CND par CF, on veut éviter de remailler le domaine global d'étude à chaque nouvelle position de la sonde. En effet, le remaillage peut s'avérer coûteux en temps CPU.

Afin de réaliser un code de simulation MEM efficace, il est primordial :

- de déterminer rapidement l'interface de couplage Γ définie dans le Chapitre 3 (paragraphe 3.4.3)
- de calculer précisément les matrices de couplage D et H (voir Chapitre 4) qui nécessitent de localiser des points d'intégration dans un maillage.

Si la mise en œuvre de ces deux points n'est pas optimisée, le temps de calcul CPU peut s'en trouver pénalisé.

On a souhaité utiliser des techniques de recherche en maillage précises, efficaces et bien adaptées à notre problème. Pour ce faire, un algorithme qui combine une méthode de recherche par bloc et une méthode du plus proche voisin a été développée.

C.2 Stratégie optimale de recherche en maillage

Critère d'appartenance à un élément

Toutes les stratégies, que l'on verra par la suite, reposent sur le même critère d'appartenance d'un point à un élément que l'on détaille ici.

Soit le déterminant noté $\det([A \ B \ C])$, défini par

$$\det([A \ B \ C]) = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{C.1})$$

avec $A = (A_x, A_y)$, $B = (B_x, B_y)$ et $C = (C_x, C_y)$ les coordonnées cartésiennes des sommets d'un élément triangulaire. La valeur de ce déterminant correspond à 2 fois l'aire du triangle (ABC) . C'est, notamment, l'information sur le signe qui permet de déterminer l'appartenance d'un point à un élément.

Soient un triangle de sommets A, B, C et X un point donné. On choisit d'imposer le sens de lecture anti-horaire $([A, B, C])$ à l'élément (le sens contraire $([A, C, B])$ convenant également) comme illustré par la figure C.1.

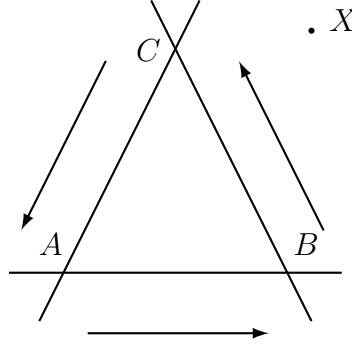


FIGURE C.1 – Orientation dans le sens anti-horaire pour l'élément $\{A, B, C\}$

Après avoir évaluées les valeurs des vecteurs \overrightarrow{AX} , \overrightarrow{BX} , et \overrightarrow{CX} , on calcule les contributions suivantes :

$$\alpha = \det([A \ B \ X]); \quad \gamma = \det([B \ X \ C]); \quad \delta = \det([A \ X \ C]). \quad (\text{C.2})$$

Si tous les déterminants $([\alpha, \gamma, \delta])$ sont positifs, alors le point appartient à l'élément, sinon le point n'appartient pas à l'élément. La figure C.2 donne les signes des déterminants en fonction de la place du point.

Algorithme 1. *Appartenance d'un point X à un élément \mathcal{K} .*

Soient les 3 sommets A, B , et C du triangle \mathcal{K} , tournant dans le sens anti-horaire, calculer les 3 contributions α, γ et δ .

1. *Si les trois valeurs sont positives alors $X \in \mathcal{K}$ (stop),*
2. *Sinon, on choisit comme nouveau triangle \mathcal{K}' l'un des triangles adjacents à l'une des arêtes associée à une contribution négative (les ambiguïtés sont levées aléatoirement).*

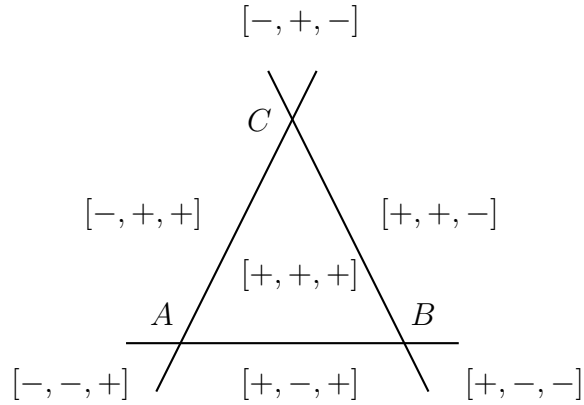


FIGURE C.2 – Test d'appartenance d'un point à un élément : signes des contributions $([\alpha, \gamma, \delta])$ en fonction de la place du point

Méthode de recherche par bloc

La figure (C.3) présente la stratégie de recherche par bloc dont l'objectif est de déterminer rapidement et efficacement à quel élément d'un maillage appartient un point donné. Cette méthode repose sur la division du domaine Ω en blocs distincts, de telle sorte que l'on cherche le bloc contenant le point X cherché. La subdivision de l'espace Ω est réalisée par une grille cartésienne de taille que l'on a prédéfinie telle que les sous-domaines Ω_1 et Ω_2 sont : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 = \{\text{tout un côté entier de } \Omega_1 \text{ et } \Omega_2\}$.

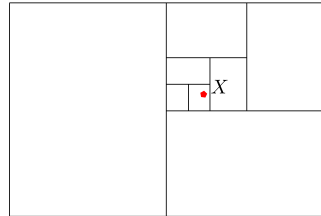


FIGURE C.3 – Méthode de recherche par bloc

Algorithme 2. Méthode de recherche par bloc

1. Diviser le domaine en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 .
2. Tester à quel sous-domaine appartient le point recherché X .
3. Garder le sous-domaine qui contient le point recherché X .
4. Si la taille du domaine conservé est supérieure au critère d'arrêt (i.e un domaine de taille prédéfinie), aller à l'étape 1, sinon stop.

Méthode du plus proche voisin

Cette méthode est particulièrement efficace lorsque que les points cherchés sont proches les uns des autres. A la première itération on part de l'élément k_1 et on cherche à localiser l'élément k_2 contenant le point X_1 en se déplaçant sur un nombre réduit d'éléments à partir de l'élément k_1 . On fait de même en partant de k_2 et ainsi de suite. Le choix de l'élément voisin vers lequel on va se déplacer pour atteindre l'élément à localiser se fait à l'aide du critère d'appartenance du point X_i à l'élément k_j , où on choisit la direction suivant l'arête qui donne un signe négatif lors du calcul de critère d'appartenance (Fig. C.4a). La figure C.4b donne un exemple de trajet possible pour localiser le point X_{i+1} en partant de X_i . Le passage d'un élément à un autre est réalisé à l'aide des nœuds voisins.

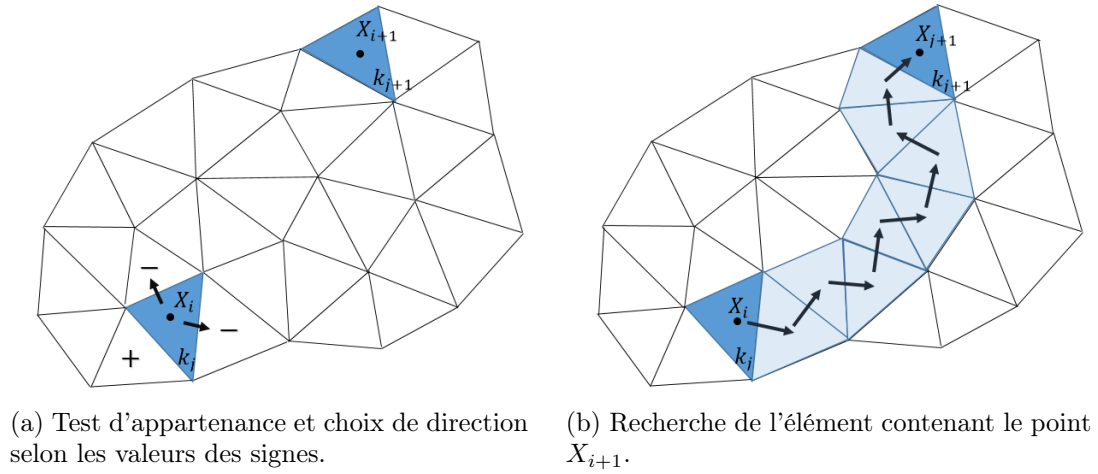


FIGURE C.4 – Méthode du plus proche voisin

Remarque C.1. *Pour plus d'efficacité lors de la recherche du premier élément on peut utiliser une autre méthode vue précédemment (une méthode de recherche par bloc par exemple) afin de se rapprocher rapidement du groupe de points à traiter.*

Algorithme 3.

1. *Initialisation : $j = 1$ et $i = 1$.*
2. *Partant de l'élément k_j , on prend un point X_i .*
3. *On applique le test d'appartenance du point X_i à l'élément k_j .*
 - (a) *Si X_i appartient à l'élément k_j , alors on incrémente ($i = i + 1$), puis on recommence l'étape (3).*
 - (b) *Sinon, on choisit une direction de recherche grâce au test d'appartenance, et on se déplace vers l'élément voisin ($j = j + 1$), k_j , puis on passe à l'étape (3).*

C.3 Gain en temps

Après la mise en pratique des techniques décrites ci-dessus, on examine les performances en temps CPU obtenues par la méthode de décomposition de domaine. Les évaluations de la méthode sont réalisées sur le cas électrostatique présenté dans l'Annexe A. La simulation est réalisée sous Matlab, le mailleur est soit celui de Matlab (pour des petits maillages) soit Gmsh (pour de grands maillages).

On regarde les temps de calcul pour des configurations géométriques modifiées (en particulier en présence de déplacement) (tableau C.1). Les discrétisations sont considérées fixées et le nombre de mailles est choisi équivalent entre les deux simulations. En particulier, le nombre d'éléments est de 11608 pour la MEF et la partie fixe de la décomposition de domaine, et 1792 pour le domaine mobile. Dans le cas d'une résolution classique par la MEF le remaillage est nécessaire à chaque déplacement. On constate qu'à densités de maillage équivalentes, pour une seule position, la MEM avec recouvrement présente un temps de calcul supérieur au temps de la MEF. Ceci s'explique par les temps de traitement nécessaire à l'identification de Γ et aux calculs des matrices de couplage qui s'ajoutent dans la simulation. Dès que les domaines se retrouvent en mouvement, la méthode est plus rapide en temps CPU (confirmé par la figure C.5a).

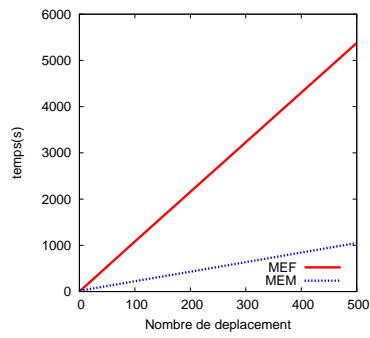
Nbre des déplacements	T_{MEF} (s)	T_{MEM} (s)	T_{MEF}/T_{MEM}
1	11.506925	18.928535	0.6
10	110.041245	37.083326	3.0
100	1083.432258	223.761625	4.8
500	5377.796458	1050.690092	5.2

TABLE C.1 – Performances comparées entre une résolution par la MEF et par la MEM en présence de mouvement

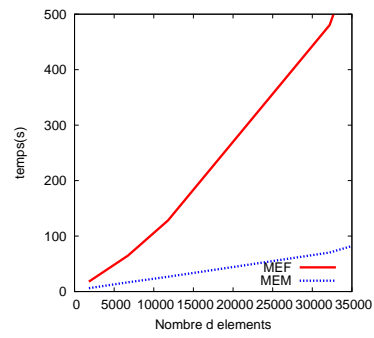
Le tableau C.2 présente les temps de calcul obtenus pour une résolution par la MEF sans décomposition de domaine et avec décomposition de domaine pour 10 déplacements en fonction du nombre d'élément en maillage. Le nombre d'élément en maillage indiqué correspond au domaine sans décomposition mais également au domaine fixe de la décomposition de domaine. Le domaine mobile est pourvu de 11788 éléments. Il apparaît que la MEM avec recouvrement est plus rapide que la MEF pour chacun des cas étudiés. Plus le maillage est fin, plus la MEM contribue à diminuer le temps CPU. Ces résultats sont confirmés par la figure (C.5b).

Nombre d'élément en maillage	T_{MEF} (s)	T_{MEM} (s)	T_{MEF}/T_{MEM}	Nombre d'élément en maillage mobile
1810	17.857438	6.128296	3	292
6752	64.969196	16.694825	3.8	546
11788	128.108731	26.742441	4.7	740
32190	480.398053	70.376516	6.8	740
104936	3411.029431	374.111439	9.1	1082

TABLE C.2 – Performances comparées entre une résolution par la MEF et par la MEM pour différentes discrétisations pour 10 déplacements



(a) En fonction du nombre de déplacements



(b) En fonction du nombre d'éléments (pour 10 déplacements)

FIGURE C.5 – Performances comparées MEF (méthode classique) et MEM avec recouvrement(méthode DD)

Bibliographie

- [1] R. ACEVEDO and R. RODRIGUEZ. Analysis of the A, V-A- ϕ Potential formulation for the eddy current problem in a bounded domain. Electronic Transactions on Numerical Analysis, pages 270–284, 2007. 53
- [2] Y. ACHDOU and Y. MADAY. The mortar element method with overlapping subdomains, pages 73–82. Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering. T. Chan and T. Kako and O. Pironneau, 1999. 51
- [3] A. ALONSO RODRIGUZ and A. VALLI. Eddy Current Approximation of Maxwell Equations, volume 4. Springer edition, 2010. 81
- [4] D. N. ARNOLD, R. S. FALK, and R. WINTHER. Multigrid in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$. Numer. Math., 85 :197–217, 2000. 46
- [5] M. AUBERTIN. Contribution à la modélisation 3D des systèmes électromagnétiques : Etude de methodes de recollement de maillages. PhD thesis, Université Lille 1, 2011. 14, 43, 45
- [6] I. BABUSKA, J. R. WHITEMAN, and T. STOUBOULIS. Finite Elements - An introduction to the method and error estimation. Oxford science publications edition, 2011. 29
- [7] L. BAILLET and T. SASSI. Méthode d’éléments finis avec hybridisation frontière pour les problèmes de contact avec frottement. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, pages 917–922, 2002. 44
- [8] E. BECACHE, P. CIARLET, C. HAZARD, and E. LUNEVILLE. La méthode des éléments finis - De la théorie à la pratique - Tome II. Les presses de l’ensta edition, 2010. 29
- [9] F. BEN BELGACEM. The mortar finite element method with Lagrange multipliers. Numer. Math., (84) :173–197, September 1999. 44, 45, 62
- [10] F. BEN BELGACEM, A. BUFFA, and Y. MADAY. The mortar finite element method for 3D Maxwell equations : first results. SIAM J. NUMER. ANAL., 39(3) :880–901, 2001. 44
- [11] F. BEN BELGACEM and Y. MADAY. The mortar element method for three dimensional finite elements . RAIRO Modélisation mathématique et analyse numérique, 31(2) :289–302, 1997. 44
- [12] A BEN ABDALLAH., F BEN BELGACEM., Y. MADAY, and F. RAPETTI. Mortaring the two-dimensional edge finite elements for the discretization of some electromagnetic models. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 14(11) :1635–1656, 2004. 44, 62, 66

-
- [13] F BEN BELGACEM., P. HILD, and P. LABORDE. Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact. M3AS, 9, 1999. 44
 - [14] H. BEN DHIA and G. RATEAU. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62(11) :1442–1462, 2004. 45
 - [15] M. BENZI, G. H. GOLUB, and J. LIESEN. Numerical solution of saddle point problems. In Acta Numerica, pages 1–137. 2005. 43
 - [16] C. BERNARDI, Y. MADAY, and A. T. PATERA. Domain Decomposition by the mortar element method. In Asymptotic and Numerical Methods for PDE with Critical Parameters, pages 269–286. Kluwer Academic Publishers, 1993. 14, 44
 - [17] C. BERNARDI, Y. MADAY, and A. T. PATERA. A New non-Conforming approach to domain decomposition : the mortar element method. In Nonlinear partial differential equations and their applications, Seminaire XI College de France. Pitman edition, 1994. 14, 44, 62
 - [18] C. BERNARDI, Y. MADAY, and F. RAPETTI. Basics and some applications of the mortar element method. GAMM - Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 28(2) :97–123, 2005. 44
 - [19] S. P. BHAT and D. S. BERNSTEIN. Second-order systems with singular mass matrix and an extension of Guyan reduction. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 17(3) :649–657, 1996. 75
 - [20] C. S. BIDDLECOMBE, J. SIMKIN, A. P. JAY, J. K. SYKULSKI, and S. LEPAUL. Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion. IEEE Transactions on magnetics, 34(5) :3182–3185, September 1998. 40
 - [21] O. BIRO and K. PREIS. On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems. IEEE Transactions on magnetics, 25 :3145–3159, 1989. 22
 - [22] A. BOSSAVIT. Whitney forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. IEE Proc., 135(8) :493–500, 1988. 26
 - [23] A. BOSSAVIT. Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions. IEE Proc., 136(5), 1989. 20
 - [24] A. BOSSAVIT. Electromagnétisme, en vue de la modélisation. Mathématiques & Applications. Springer-verlag edition, 1991. 28
 - [25] A. BOSSAVIT. Computational Electromagnetism. 1998. 20
 - [26] F. BOUILLAUT, A. BUFFA, Y. MADAY, and F. RAPETTI. The mortar edge element method in three dimensions : application to magnetostatics. SIAM J. on Scient. Comp., 24 :1303–1327, 2002. 44
 - [27] D. E. BRAY and R. K. STANLEY. Nondestructive evaluation. A Tool in design, manufacturing, and service. N. Stanton, revise edition edition, 1997. 81
 - [28] S. C. BRENNER and L. R. SCOTT. The Mathematical Theory of Finite Element Method. Springer-verlag edition, 1994. 29

- [29] H. BREZIS. Analyse fonctionnelle. Masson edition, 1987. 20
- [30] A. BUFFA, M. COSTABEL, and D. SHEEN. On traces for $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ in Lipschitz domains. Journal of Mathematical analysis and applications, 276 :845–867, 2002. 64
- [31] X.-C. CAI, M. DRYJA, and M. SARKIS. Overlapping non-matching grid mortar element methods for elliptic problems. SIAM J. NUMER. ANAL., 36 :581–606, 1998. 51
- [32] S. CAILLEAU, V. FEDORENKO, B. BARNIER, E. BLAYO, and L. DEBREU. Comparison of different numerical methods used to handle the open boundary of a regional ocean circulation model of the Bay of Biscay. Ocean Modelling, 25(1) :1–16, 2008. 46
- [33] Y. CHOUA. Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, Octobre 2009. 85
- [34] P. CIARLET and E. LUNEVILLE. La méthode des éléments finis - De la théorie à la pratique - Tome I. Les presses de l'ensta edition, 2009. 29
- [35] P. CIARLET and A. J. ZOU. Fully discrete finite element approaches for time-dependent Maxwell equations. Numer. Math., 82 :193–219, 1999. 64
- [36] Ph. CIARLET. Lectures on The Finite Element Method . 1975. 30
- [37] R. W. CLOUGH. The finite Element Method in Plane Stress Analysis. 1960. 30
- [38] J.-P. CORRIOU. Méthodes numérique et optimisation. Lavoisier edition, 2010. 75
- [39] R. COURANT. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, 49 :1–23, 1943. 30
- [40] E. CREUSÉ, S. NICAISE, Z. TANG, Y. LE MENACH, N. NEMITZ, and F. PI-RIOU. Residual-based a posteriori estimators for the $A\text{-}\phi$ magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system. M3AS, 22(5), 2012. 53
- [41] E. CREUSÉ, S. NICAISE, Z. TANG, Y. LE MENACH, N. NEMITZ, and F. PI-RIOU. Residual-based a posteriori estimators for the T/Ω magnetodynamic harmonic formulation of the Maxwell system. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 10(2) :411–429, 2013. 53
- [42] M. DELFOUR. Introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel. Dunod edition, 2012. 75
- [43] G. DHATT, G. TOUZOT, and E. LEFRANCOIS. Méthode des éléments finis. Hermes Science publications, lavoisier edition, 2005. 29, 71
- [44] C. V. DODD and W. E. DEEDS. Analytical solutions to eddy-current probecoil problems. Journal of Applied Physics, 39 :2829–2838, 1968. 13
- [45] V. DOLEAN, S. LANTERI, and F. NATAF. Convergence analysis of a Schwarz type domain decomposition method for the solution of the Euler equations . Technical report, INRIA, 2000. 46

-
- [46] T. DREHER, R. PERRIN-BIT, G. MEUNIER, and J. L. COULOMB. A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit. IEEE Transactions on magnetics, 32(3) :1070–1073, May 1996. 14, 42
 - [47] P. DULAR. Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires. PhD thesis, Université de Liège, Faculté des Sciences appliquées, Septembre 1996. 29
 - [48] J. DUMONT-FILLON. Contrôle non destructif. Techniques de l'ingénieur, 1996. 81
 - [49] J. R. FERNANDEZ GARCIA, P. HILD, and J. M. VIANO. Résolution numérique d'un problème de contact entre corps élasto-viscoplastiques et maillages éléments finis incompatibles. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 331(10) :833–838, 2000. 44
 - [50] B. FLEMISCH, Y. MADAY, F. RAPETTI, and B. WOHLMUTH. Coupling scalar and vector potentials on nonmatching grids for eddy currents in a moving conductor. Journal of Computational and Applied Mathematics, (168) :191–205, 2004. 51
 - [51] B. FLEMISCH, M. MAIR, and B. WOHLMUTH. Nonconforming discretization techniques for overlapping domain decomposition. In Numerical Mathematics and Advanced Applications, pages 316–325. Proc. of ENUMATH 2003, 2004. 51
 - [52] B. FLEMISCH and B. WOHLMUTH. A domain decomposition method on nested domains and nonmatching grids. Numer. Methods Partial Differ. Equations, 20 :374–387, 2004. 51, 63, 66
 - [53] B. FLEMISCH, B. WOHLMUTH, F. RAPETTI, and Y. MADAY. Scalar and vector potentials' coupling on nonmatching grids for the simulation of an electromagnetic brake. COMPEL (Int. J. for Comp. and Math. in Electric and Electronic Eng.), 24(3) :1061–1070, 2005. 14, 51
 - [54] M. J. GANDER. Schwarz methods in the course of time. ETNA, 31 :228–255, 2008. 46
 - [55] J. GARCIA-MARTIN, J. GOMEZ-GIL, and E. VAZQUEZ-SANCHEZ. Non-Destructive Techniques Based on Eddy Current Testing. Sensors, 11(3) :2525–2565, 2011. 81
 - [56] C. GOLOVANOV. Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement. PhD thesis, 1992. 42
 - [57] C. GOLOVANOV, J. L. COULOMB, Y. MARECHAL, and G. MEUNIER. 3D Mesh connection techniques applied to movement simulation. IEEE Transactions on magnetics, 34(5) :3359–3362, September 1998. 43
 - [58] J. GOPALAKRISHNAN and J. E. PASCIAK. Overlapping Schwarz preconditioners for indefinite time harmonic Maxwell equations. Mathematics of computation, 72(241) :1–15, 2001. 46
 - [59] C. GRANDMONT and Y. MADAY. Nonconforming Grids for the Simulation of Fluid-Structure Interaction. Contemporary Mathematics, 218, 1998. 44

- [60] S. GUERRE-DELABRIERE and M. POSTEL. Méthodes d'approximation Equations différentielles Application Scilab. ellipses edition, 2004. 30
- [61] R. J. GUYAN. Reduction of Stiffness and Mass Matrices. AIAA Journal, 3(2) :380, 1964. 75
- [62] D. HAGEMAIER. Eddy Current impedance plane analysis. Materials Evaluation, 41 :211–218, 1982. 83
- [63] R. HIPTMAIR and A. TOSELLI. Overlapping Schwarz methods for vector valued elliptic problems in three dimensions. 1997. 46
- [64] Q. HU and A. J. ZOU. A Nonoverlapping domain decomposition method for Maxwell's equations in three dimensions. SIAM J. NUMER. ANAL., 41(5) :1682–1708, 2003. 62
- [65] Q. HU and A. J. ZOU. A mortar edge element method with nearly optimal convergence for three-dimensional Maxwell's equations. Mathematics of computation, 77(263) :1333–1353, July 2008. 62
- [66] NEDELEC. J.C. A New Family of Mixed Finite Elements in \mathbb{R}^3 . Numer. Math., 50 :57–81, 1986. 26
- [67] A. KAMEARI. Calculation of transient 3D eddy current using edge elements. IEEE Transactions on magnetics, 26(2) :466–469, 1990. 22
- [68] D. E. KEYES, T. F. CHAN, G. MEURANT, J. S. SCROGGS, and R. G. VOIGT. Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. 1991. 39
- [69] A. KOMETANI, S. SAKABE, and A. KAMEARI. 3-D analysis of induction motor with skewed slots using regular coupling mesh. IEEE Transactions on magnetics, 36(4) :1769–1773, 2000. 42
- [70] G. KREBS, S. CLENET, and I. A. TSUKERMAN. Overlapping finite elements for arbitrary surfaces in 3-D. IEEE Transactions on magnetics, 46(8) :3473–3476, August 2010. 40
- [71] S. LAPIN, A. LAPIN, J. PERIAUX, and P. M. JACQUART. A Lagrange Multiplier Based Domain Decomposition Method for the Solution of a Wave Problem with Discontinuous Coefficients. Partial Differential Equations Computational Methods in Applied Sciences, 16 :131–145, 2008. 43
- [72] Y. LE BIHAN. Study on the transformer equivalent circuit of eddy current non-destructive evaluation. NDT & E International, 36(5) :297–302, July 2003. 81, 89
- [73] S. LEPAUL, J. K. SYKULSKI, C. S. BIDDLECOMBE, A. P. JAY, and J. SIMKIN. Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis. IEEE Transactions on magnetics, 35(3) :1602–1605, May 1999. 40
- [74] T. LIM. Formulation intégrale surfacique des équations de Maxwell pour la simulation de contrôles non destructifs par courants de Foucault. Etude préliminaire à la mise en œuvre de la méthode multipôle rapide. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2011. 13

-
- [75] J. MANDEL, C. FARHAT, and X.-C. CAI. Domain Decomposition Methods 10. American mathematical society edition, 1997. 39
- [76] Y. MARECHAL, G. MEUNIER, J. L. COULOMB, and H. MAGNIN. A General purpose tool for restoring inter-element continuity. IEEE Transactions on magnetics, 28(2) :1728–1731, March 1992. 43
- [77] T. P. A. MATHEW. Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations. 2008. 39
- [78] L. MAURICE. Développement d'un modèle d'interaction d'un champ électromagnétique avec défaut plan dans un matériau conducteur : application à la simulation d'un procédé de contrôle non destructif par courants de Foucault. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2008. 13
- [79] P. MONK. A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations. Numer. Math., 63 :253–261, 1992. 36
- [80] P. MONK. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. 2003. 30, 34
- [81] T. MORISUE. Magnetic vector potential and electric scalar potential in three-dimensional eddy current problem. IEEE Transactions on magnetics, 18(2) :531–535, 1982. 22
- [82] T. MORISUE and M. FUKUMI. 3D eddy current calculations using the magnetic vector potential. IEEE Transactions on magnetics, 24(1) :106–109, January 1988. 22
- [83] A. KAMENI NTICHI. Etude par des méthodes analytiques et numériques de la répartition des champs induits dans les supraconducteurs à haute température critique. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2009. 13
- [84] L. A. OSPINA VARGAS. Prise en compte de milieux fins dans la méthode des éléments finis pour la modélisation en contrôle non-destructif par courants de Foucault. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2010. 85
- [85] R. PERRIN-BIT. Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calcul des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement. PhD thesis, 1994. 42
- [86] A. QUARTERONI, R. SACCO, and F. SALERI. Méthodes numériques pour le calcul scientifique - Programmes en MATLAB. Springer-Verlag, France, 2000. 96
- [87] A. QUARTERONI, R. SACCO, and F. SALERI. Numerical Mathematics. 2nd ed. Springer edition, 2007. 75
- [88] A. QUARTERONI and A. VALLI. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. 1999. 39
- [89] F. RAPETTI. Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints. PhD thesis, Université Paris 6, Mai 2000. 44, 45, 62, 65, 66
- [90] F. RAPETTI. Discrétisation variationnelle d'ordre élevé sur simplexes : applications à l'électromagnétisme numérique. HDR, Juin 2008. 51, 59, 63, 66

- [91] F. RAPETTI. An overlapping mortar element approach to coupled magneto-mechanical problems. Math. Comput. Simul., 80(8) :1647–1656, 2010. 14, 51, 59, 66
- [92] G. RATEAU. Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles - Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2003. 45, 96
- [93] C. RAVAT. Conception de multicapteurs à courants de Foucault et inversion des signaux associés pour le contrôle non destructif. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2008. 83
- [94] D. RODGER, H. C. LAI, and P. J. LEONARD. Coupled elements for problems involving movement. IEEE Transactions on magnetics, 26(2) :548–550, March 1990. 14, 43
- [95] A. ALONSO RODRIGUEZ, P. FERNANDES, and A. VALLI. Weak and strong formulations for the time-harmonic eddy-current problem in general multi-connected. Journal of Applied Mathematics, 14 :387–406, 2003. 53
- [96] A. ALONSO RODRIGUEZ and A. VALLI. A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 143 :97–112, 1997. 53
- [97] X. SHI. Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliquée à la modélisation des machines électriques. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, Décembre 2005. 14, 42
- [98] P. SILVESTER and M. V. K. CHARI. Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-89(7) :1642–1651, 1970. 30
- [99] B. SMITH, P. BJORSTAD, and W. GROPP. Domain Decomposition Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations. Cambridge university press edition, 1996. 39
- [100] F. STRANG and G. FIX. An Analysis of the Finite Element Method. Wellesley - cambridge press edition, 1973. 30
- [101] T. P. THEODOULIDIS. Analytical model for tilted coils in eddy-current nondestructive inspection. IEEE Transactions on Magnetism, 41 :2447–2454, 2005. 13
- [102] G. T. TOMAICH. A Genuinely Multi-Dimensional Upwinding Algorithm for Navier-Stokes Equations on Unstructured Grids using a Compact, Highly-Parallelizable Spatial Discretization. PhD thesis, University of Michigan. 34
- [103] E. TONTI. On the Geometrical Structure of the Electromagnetism. In Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structure, pages 281–308. Pitagora editrice bologna edition, 1995. 24
- [104] I. A. TSUKERMAN. Overlapping finite elements for problems with movement. IEEE Transactions on magnetics, 28(5) :2247–2249, September 1992. 14, 40
- [105] M. J. TURNER. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, 23(9) :805–823, 1956. 30

- [106] B. WOHLMUTH. Hierarchical a posteriori error estimators for mortar finite element methods with lagrange multipliers. SIAM J. NUMER. ANAL., 36 :1636–1658, 1999. 62
- [107] B. WOHLMUTH. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. SIAM J. NUMER. ANAL., (38) :989–1012, 2000. 44, 45, 96
- [108] H. ZAIDI. Méthodologies pour la modélisation des couches fines et du déplacement en contrôle non destructif par courants de Foucault : application aux capteurs souples. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2012. 13, 40, 85
- [109] Y. K. ZIENKIEWICZ. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Mcgraw-hill edition, 1967. 30

Communications

Articles dans des revues à comité de lecture

- A. Christophe, L. Santandréa, F. Rapetti, G. Krebs, Y. Le Bihan, An overlapping nonmatching grid mortar element method for Maxwell's equations, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 50, Issue : 2, February 2014
- A. Christophe, F. Rapetti, L. Santandréa, G. Krebs, Y. Le Bihan, Mortar FEs on overlapping subdomains for eddy current non destructive testing, *Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013, LNCSE*, Vol. 103, 2015, pp 785-793

Communications orales

- An Overlapping Non-Matching Grid Mortar Element method for Maxwell's equations, *Compumag 2013, Budapest, Juillet 2013* (Plénière)
- Mortar FEs on Overlapping Subdomains for Eddy Current non destructive testing, *Enumath, Lausanne, Aout 2013*
- Mortar FEs on Overlapping Meshes : Application to Magnetodynamic, *ESCO 2014, Pilsen, Juin 2014*

Communications murales

- A Mortar Edge Element Method with Overlapping for Time Domain Magnetodynamic calculations, *CEM 2014, Londres, Mars-Avril 2014*
- Méthode de décomposition de domaine pour la modélisation de contrôles non destructifs par courants de Foucault, *COFREND 2014, Bordeaux, Mai 2014*
- Numerical Method with Overlapping Non-Matching Grids to Take into Account the Displacement for Eddy Current Problem, *CEFC 2014, Annecy, Mai 2014*

Résumé

Cette thèse vise à développer et à évaluer une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement dans le cadre de la modélisation du contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault (CF). L'objectif d'une telle approche consiste à éviter le re-maillage systématique de l'intégralité du domaine d'étude lors du déplacement de l'un de ses éléments constitutifs (par exemple, déplacement de la sonde CF au dessus de la pièce contrôlée). Plus précisément, il s'agit de concevoir une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement qui s'appuie sur la théorie apportée par la méthode des éléments finis avec joints. En plus de s'affranchir de la contrainte d'une interface d'échange invariante avec le mouvement, la technique décrite dans ce travail réalise des transferts d'information réciproques entre les domaines. Cette étude présente les résultats théoriques ainsi que numériques liés à la simulation magnétodynamique. Par ailleurs, l'intérêt d'une telle méthode est illustré par des applications sur des configurations bidimensionnelles de CND par CF.

Abstract

This thesis aims at studying and developing a domain decomposition method with overlapping subdomains for the modeling in eddy current (EC) non-destructive testing (NDT). The idea behind such an approach is the possibility to avoid the systematic remeshes of the whole studying domain when some of its components are modified (for example the displacement of the coil above the conductor). More precisely, this work aims at designing a domain decomposition method with overlapping based on the theory of the mortar finite element method. In addition to remove the constraint owing to an coupling interface which is invariant with the displacement, the technique described, in this work, realizes reciprocal transfers of information between subdomains. This study presents the theoretical and numerical results attached to the magnetodynamic simulation. Moreover, the interest of such a method is illustrated by applications in some 2D modeling cases of EC NDT.

Mots-clés : Méthode des éléments finis, méthode des éléments finis avec joints, électromagnétisme, contrôle non destructif, courants de Foucault

Keywords : Finite element method, mortar element method, Maxwell's equations, eddy current, non-destructive testing